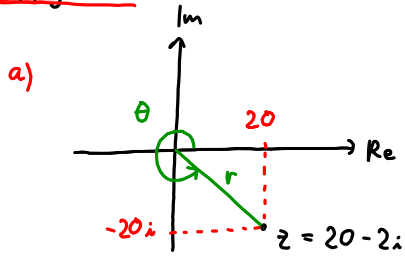
Obligatorisk oppgave 1 MAT 1100 høst 22
Løsningsforslag

Oppgave 1

a)



Ser at $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$$r = \sqrt{20^2 + 20^2} = \sqrt{800} = \sqrt{400 \cdot 2} = \sqrt{400} \cdot \sqrt{2} = 20\sqrt{2}$$

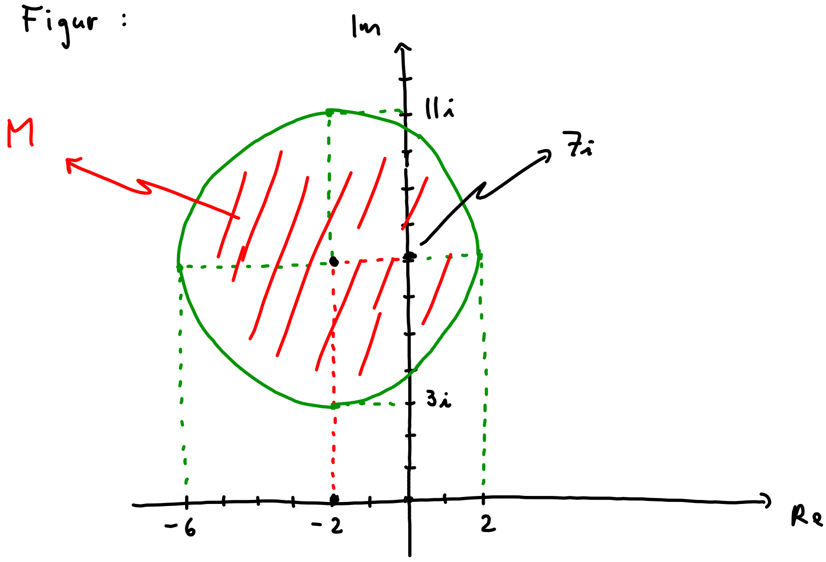
Så $z = \underline{20\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{7\pi}{4}\right)}}$

b) Kravet M er gitt ved, kan skrives

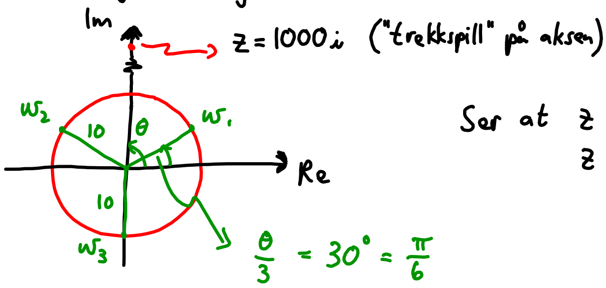
$$|z - (-2 + 7i)| \leq 4$$

Mengden av alle $z \in \mathbb{C}$ som oppfyller dette, er en lukket sirkelskive med sentrum i $-2 + 7i$ og radius 4.

Figur :



c) Vi kan tegne en figur som viser omtrent hvordan røttene ligger :



$\frac{\theta}{3} = 30° = \frac{\pi}{6}$

Ser at $z = 1000i = 1000\, e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}$

z har polarkoordinater $\theta = \frac{\pi}{2}$, $r = 1000$

Ser at $w_1 = \sqrt[3]{1000}\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)} = 10\, e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}$

$$= 10\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right) = 10\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \underline{5\sqrt{3} + 5i}$$

Ser så at $w_2 = \underline{-5\sqrt{3} + 5i}$ og $w_3 = \underline{-10i}$

Oppgave 2

$$P(z) = z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$$

a) Siden vi vet at roten er heltallig, kan vi gjette. (Typisk: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$)

Vi får $P(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$
$= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Så $z = -1$ er en heltallig, reell rot.

b) Polynomdivisjon:

$$(z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) : (z+1) = z^4 + z^2 + 1$$
$$\begin{array}{l} \underline{z^5 + z^4} \\ \quad z^3 + z^2 + z + 1 \\ \quad \underline{z^3 + z^2} \\ \qquad z + 1 \\ \qquad \underline{z + 1} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

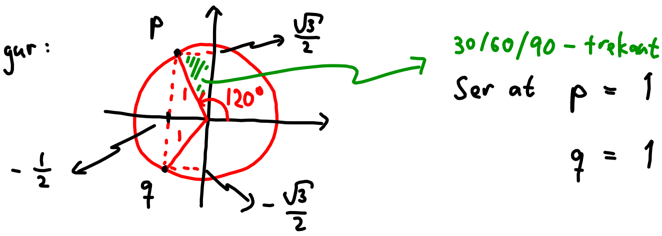
Altså
$$P(z) = (z+1)(z^4 + z^2 + 1)$$

Videre: $z^4 + z^2 + 1 = 0$ kan skrives $(z^2)^2 + (z^2) + 1 = 0$

Dette gir
$$z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = \begin{cases} -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

De fire siste røttene til $P(z)$ blir altså kvadratrøttene til de to tallene
$$p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{og} \quad q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Figur:



Ser at $p = 1 \cdot e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$

$q = 1 \cdot e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = e^{i\left(\frac{4\pi}{3}\right)}$

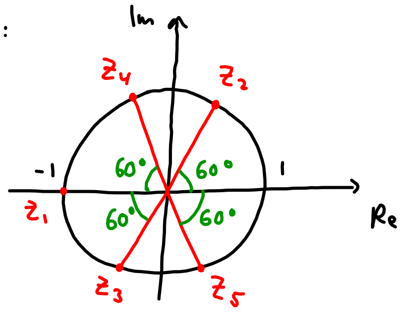
Vi ser nå at kvadratrøttene til p blir $\underline{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ og $\underline{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

kvadratrøttene til q blir $\underline{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ og $\underline{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

Så røttene til $P(z)$ er

$z_1 = -1$
$z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
$z_5 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Figur:



c) Vi ganger sammen faktorer svarende til konjugerte røtter:

$$(z - z_2)\cdot(z - z_5) = z^2 - z + 1 \quad \text{og} \quad (z - z_3)\cdot(z - z_4) = z^2 + z + 1$$

Så $\underline{P(z) = (z+1)\cdot(z^2 - z + 1)\cdot(z^2 + z + 1)}$ er reell faktorisering

Oppgave 3

a) Karlet sier at man finner neste hemmelige tall ved å regne slik:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot x_n^3 + 1728}{4}} \quad \text{for } n \geq 0$$

Dette kan skrives

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1728}{4} + \frac{3}{4}x_n^3} = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}x_n^3}$$

Anta at følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ konvergerer mot et tall L. Da får vi

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{x_{n+1}}_{\to L} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}\underbrace{x_n}_{\to L}^3}$$

Bruk av vanlige grenselover gir da

$$L = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}L^3},$$

det vil si

$$L^3 = 432 + \frac{3}{4}L^3$$
$$\frac{1}{4}L^3 = 432$$
$$L^3 = 1728$$
$$L = 12$$

Hvis følgen konvergerer, konvergerer den altså mot 12

b) Beviser først ved induksjon at følgen er nedad begrenset av 12, altså at $x_n \geq 12$ for alle n.

Siden antall trinn i stigen er større enn 12, er $x_0 \geq 12$.

Anta at $x_n \geq 12$. Da får vi

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}x_n^3} \geq \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}\cdot 12^3} = \sqrt[3]{1728} = 12$$

Dermed er induksjonsbeviset komplett, vi har vist at $x_n \geq 12$ for alle n.

Får nå $x_n^3 \geq 12^3 = 1728$ for alle $n \geq 0$. Dette gir at følgen er avtakende:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{3x_n^3 + 1728}{4}} \leq \sqrt[3]{\frac{3x_n^3 + x_n^3}{4}} = x_n \quad \text{for alle } n \geq 0.$$

(Oppgave 3 forts.)

c) Beviser først ved induksjon at følgen er oppad begrenset av 12, altså at $x_n \leq 12$ for alle $n \geq 0$.

Siden antall trinn i stigen er mindre enn 12, er $x_0 \leq 12$.

Anta at $x_n \leq 12$. Da får vi

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}x_n^3} \leq \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}\cdot 12^3} = \sqrt[3]{1728} = 12$$

Dermed er induksjonsbeviset komplett, vi har vist at $x_n \leq 12$ for alle $n \geq 0$.

Vi vet nå at $x_n^3 \leq 12^3 = 1728$ for alle $n \geq 0$. Dette gir oss at følgen er voksende:

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{3x_n^3 + 1728}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{3x_n^3 + x_n^3}{4}} = x_n \quad \text{for alle } n \geq 0.$$

Hvis antall trinn i stigen var akkurat 12, blir følgen konstant. Grunnen er at hvis $x_n = 12$, får vi

$$x_{n+1} = \sqrt[3]{432 + \frac{3}{4}\cdot 12^3} = \sqrt[3]{1728} = 12$$

Dermed konvergerer følgen (trivielt) mot 12 hvis antall trinn var 12.

d) Hvis antall trinn var større enn 12, gir kompletthetsprinsippet for følger kombinert med resultatene fra b) og a) at følgen konvergerer mot 12.

Hvis antall trinn var mindre enn 12, gir kompletthetsprinsippet for følger kombinert med resultatene fra c) og a) at følgen konvergerer mot 12.

Hvis antall trinn var 12, konvergerer følgen trivielt mot 12.

Altså konvergerer følgen mot 12 uansett hvor mange trinn stigen hadde.

Det virker rimelig å tolke Karlots utsagn om at de hemmelige tallene "etter hvert" vil fortelle hvor mange skritt man skal gå, som at antall skritt blir det følgen $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ nærmer seg mot.

Altså må man gå <u>12 skritt.</u>

Oppgave 4

Vi har

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot f(h) - 0 \cdot f(0)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(h) = f(0),$$

der siste likhet holder fordi f er kontinuerlig i 0.
Altså er g deriverbar i 0, og $g'(0) = f(0)$.

Hvis $x \neq 0$, er f deriverbar i x. Da får vi

$$g'(x) = \left(x \cdot f(x)\right)' = 1 \cdot f(x) + x \cdot f'(x)$$

$$= f(x) + x \cdot f'(x)$$

ved produktregelen for derivasjon. Det følger at g er deriverbar for alle $x \neq 0$.

Alt i alt har vi nå vist at g er deriverbar for alle $x \in \mathbb{R}$.