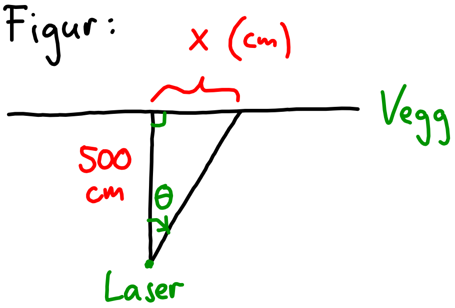
Løsningsforslag obligatorisk oppgave 2 MAT1100 høsten 2022

Oppgave 1

a) Figur:



Vi ser at

$$\tan\theta = \frac{x}{500}$$

Altså

$$\theta\,[\text{målt i radianer}] = \arctan\left(\frac{x}{500}\right)$$

Vi skal ha $\theta = \theta(t)$ målt i grader. Altså

$$\theta(t) = \frac{180}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{500}\right)$$

La $x(t)$ være flekkens posisjon på veggen målt i cm mot høyre fra midtpunktet, der t måles i sekunder. Siden flekken skal passere midtpunktet ved $t=0$, er

$$x(0) = 0$$

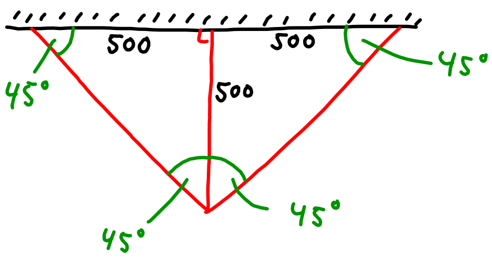
Siden flekken beveger seg med hastighet 1 cm per sekund i positiv x-retning (mot høyre), får vi da

$$x(t) = t$$

Setter vi inn dette i uttrykket vi fant for $\theta(t)$, får vi

$$\theta(t) = \frac{180}{\pi}\cdot\arctan\left(\frac{t}{500}\right)$$

b)



Vi ser at det her dannes to 45/45/90 - trekanter

At flekken beveger seg fra $\theta = -45°$ til $\theta = 45°$, svarer altså til en strekning på

$$500\text{ cm} + 500\text{ cm} = 1000\text{ cm}$$

Siden flekken beveger seg med fart 1 cm/sek, tar dette

$$1000\text{ sek} = \underline{\underline{16\text{ min }40\text{ sek}}}$$

c) Derivasjon av $\theta(t)$ gir

$$\theta'(t) = \frac{180}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{t^2}{500^2}} \cdot \frac{1}{500}$$

$$= \frac{180}{\pi} \cdot \frac{500}{250\,000 + t^2} = \underline{\underline{\frac{90\,000}{\pi(250\,000 + t^2)}}} \quad \text{(grader/sek)}$$

d) Vinkelhastighet når lysflekken passerer midten av veggen:

$$\theta'(0) = \frac{90000}{\pi \cdot 250\,000} = \underline{\underline{\frac{9}{25\pi}}} \approx 0{,}115 \quad \text{(grader/sek)}$$

e) Vi har

$$\lim_{x \to \pm\infty} \theta'(t) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{90\,000}{\pi(250\,000 + \underbrace{t^2}_{\infty})} = \underline{\underline{0}}$$

Tolkning: Naturligvis er ikke veggen uendelig bred. Men hvis vi tenker oss at den var svært bred, ville vinkelhastigheten målt gå mot 0 når lysflekken beveger seg stadig lenger ut til en av sidene.

Oppgave 2

a) Formelen for graflengde gir, med $f(x) = x^2$

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2}\,dx$$

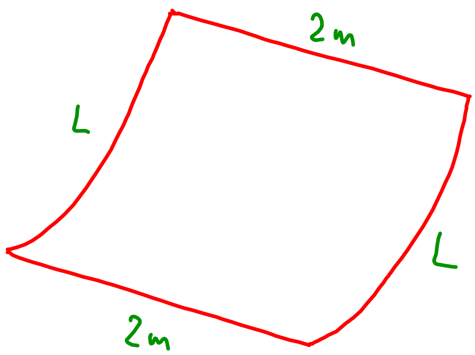
$t = 2x$, $\frac{dt}{dx} = 2$

$dt = 2dx$, $dx = \frac{1}{2}dt$

$$= \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{1+t^2}\,dt$$

b) Taket ser slik ut :



Vi ser her at arealet av taket til modellen målt i m^2 blir

$$2L$$

c) Forstørrelsen for lengder (målestokken) er

$$1 : 10$$

mellom modell og virkelighet. Dermed blir arealet av taket til det virkelige hundehuset

$$10 \cdot 10 = 100$$

ganger større enn arealet av taket til modellen.
Så arealet av det ekte taket blir

$$\underline{\underline{200 \cdot L}}$$

d) Substitusjonen $t = \frac{1}{2}(e^u - e^{-u})$ gir

$$\frac{dt}{du} = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}), \quad \text{så} \quad dt = \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})\,du$$

Regner så om grensene:

$\underline{t=0}$ gir $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = 0$, dvs. $e^u = e^{-u}$

Altså $\ln(e^u) = \ln(e^{-u})$

$u = -u$, så $\underline{u = 0}$

$\underline{t=2}$ gir $\frac{1}{2}(e^u - e^{-u}) = 2$, dvs. $e^u - e^{-u} = 4$

Løser denne ved å konvertere til annengradslikning:

$(e^u)^2 - 1 = 4e^u$ [ganget med e^u]

$(e^u)^2 - 4(e^u) - 1 = 0$, som gir

$$e^u = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = \frac{4+\sqrt{20}}{2}$$

må ha pluss, siden $e^u < 0$ er umulig

$$= 2 + \frac{\sqrt{20}}{2}$$

$$= 2 + \sqrt{\frac{20}{4}} = 2 + \sqrt{5}$$

Altså $\underline{u = \ln(2+\sqrt{5})}$

(Oppgave 2 forts.)

Dette gir

$$L = \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \sqrt{1+t^2}\, dt$$

Substitusjonen

$$= \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^u - e^{-u})^2} \cdot \frac{1}{2}(e^u + e^{-u})\, du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{1+\frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u})} \cdot (e^u + e^{-u})\, du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u})} \cdot (e^u + e^{-u})\, du$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \sqrt{\frac{1}{4} \cdot (e^u + e^{-u})^2} \cdot (e^u + e^{-u})\, du$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} \frac{1}{2}(e^u + e^{-u}) \cdot (e^u + e^{-u})\, du$$

$$= \frac{1}{8} \int_0^{\ln(2+\sqrt{5})} (e^{2u} + 2 + e^{-2u})\, du$$

$$= \left[\frac{1}{16} e^{2u} + \frac{1}{4} u - \frac{1}{16} e^{-2u} \right]_0^{\ln(2+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{16} \left[e^{\ln(2+\sqrt{5})} \right]^2 + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{16} \left[e^{\ln(2+\sqrt{5})} \right]^{-2}$$

$$= \frac{1}{16} (2+\sqrt{5})^2 + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5}) - \frac{1}{16} \frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}$$

$$\boxed{\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2} = \frac{(2-\sqrt{5})^2}{[(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})]^2} = \frac{4 - 4\sqrt{5} + 5}{(4-5)^2} = 9 - 4\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{16} \left[(\cancel{4} + 4\sqrt{5} + \cancel{5}) - (\cancel{9} - 4\sqrt{5}) \right] + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4} \ln(2+\sqrt{5})$$

Arealet av taket til hundehuset målt i m^2 blir da

$$A = 200\, L = 100\sqrt{5} + 50 \ln(2+\sqrt{5}) \approx 296 \quad (m^2)$$