UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Onsdag, 8. desember 2004.
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktig!

1. (3 poeng) Integralet $\int xe^x \, dx$ er lik:
☐ $xe^x - e^x + C$
☐ $\frac{x^2}{2}e^x + C$
☐ $\frac{x^3}{3}e^x + C$
☐ $e^{x^2/2} + C$
☐ $\frac{x^2}{2}e^x - \frac{x^3}{3}e^x + C$

2. (3 poeng) Hva gjør vi først når vi skal løse integralet $\int \frac{x^4+3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, dx$ ved delbrøkoppspalting?
☐ substituerer $u = x^2 + 2x + 2$
☐ setter integranden lik $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
☐ smugler den deriverte av nevneren inn i telleren
☐ polynomdividerer $x^4 + 3x^2 - x + 2$ med $x^3 + x^2 - 2$
☐ setter integranden lik $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+2x+2}$

3. (3 poeng) Hva får vi når vi substituerer $u = \arctan x$ i integralet $\int_0^1 \sin(\arctan x) \, dx$?
☐ $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2 \sin u \, du$
☐ $\int_0^1 \frac{\sin u}{1+u^2} \, du$
☐ $-\int_0^{\pi/4} \sin u \, du$
☐ $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{1+u^2} \, du$
☐ $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{\cos^2 u} \, du$

(Fortsettes side 2.)

4. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y,z) = z\cot(xy)$?
- ☐ $\frac{xz}{\cos^2(xy)}$
- ☐ $\frac{xz}{1+x^2z^2}$
- ☐ $\frac{xz}{\sqrt{1-x^2z^2}}$
- ☐ $zx\tan(xy)$
- ☐ $-\frac{xz}{\sin^2(xy)}$

5. (3 poeng) I hvilken retning vokser funksjonen $f(x,y) = xy\cos y$ raskest i punktet $(-1,\pi)$:
- ☐ $(1, 4\pi)$
- ☐ $(2\pi, 1)$
- ☐ $(0, 1)$
- ☐ (π, π)
- ☐ $(-\pi, 1)$

6. (3 poeng) Hva er den retningderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ når $f(x,y) = xe^{xy}$, $\mathbf{a} = (2,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,1)$?
- ☐ 4
- ☐ $-e^{-1}$
- ☐ e^2
- ☐ $3e^2$
- ☐ e^3

7. (3 poeng) Området mellom x-aksen og grafen til $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \leq x \leq \sqrt{\pi}$, dreies en gang om y-aksen. Hva er volumet til omdreiningslegemet?
- ☐ $\frac{13}{2}$
- ☐ $\frac{9\pi}{4}$
- ☐ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- ☐ 2π
- ☐ $\frac{7}{3}e$

8. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_e^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx$:
- ☐ konvergerer og er lik $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ konvergerer og er lik 2
- ☐ divergerer
- ☐ konvergerer og er lik $\sqrt{5}$
- ☐ konvergerer og er lik $\frac{5}{2}$

9. (3 poeng) Hva er grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n}\sum_{i=1}^{n} \sin(\frac{\pi}{2n}i)$?
- ☐ $\frac{7\pi}{22}$
- ☐ $\frac{\pi}{3}$
- ☐ $\frac{\pi^2}{10}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

10. (3 poeng) I en regulerbar gasstank er trykket P gitt som en funksjon $P = F(V,T)$ av volumet V og temperaturen T. Dersom V og T er funksjoner av tiden t slik at $V(t) = 1 + e^{-t/10}$ og $T(t) = 20 + 6\sin(\frac{\pi}{12}t)$, hva er da den deriverte av trykket P med hensyn på tiden t?
- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t)) + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))$
- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t))(1+e^{-t/10}) + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))(20+6\sin(\frac{\pi}{12}t))$
- ☐ $P'(t) = -\frac{1}{10}\frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t))e^{-t/10} + \frac{\pi}{2}\frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))\cos(\frac{\pi}{12}t)$
- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t))e^{-t/10} + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))\cos(\frac{\pi}{12}t)$
- ☐ $P'(t) = -\frac{1}{10}V(t)e^{-t/10} + \frac{\pi}{2}T(t)\cos(\frac{\pi}{12}t)$

SLUTT PÅ DEL 1

(Fortsettes side 3.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1:
a) (10 poeng) Regn ut de partiellderiverte av første orden til funksjonen

$$f(x,y) = (x+y^2)e^x$$

og finn det stasjonære punktet.

b) (10 poeng) Avgjør om det stasjonære punktet er et sadelpunkt, et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Oppgave 2:
a) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$

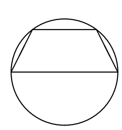
b) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

(Hint: Vis først at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$.)

c) (10 poeng) Finn buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \ln(\cos x)$ fra $x = 0$ til $x = \frac{\pi}{6}$. (Husk at formelen for buelengde er $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.)

Oppgave 3: (10 poeng) På figuren ser du en sirkel med radius r. Et trapes er tegnet inn i sirkelen slik at grunnlinjen til trapeset er en diameter i sirkelen. De to andre hjørnene til trapeset ligger på sirkelomkretsen. Finn det største arealet et slikt trapes kan ha.



Oppgave 4: (10 poeng) Funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig, og $a, b \in \mathbf{R}$ er tall slik at $a < b$ og $f(a) < f(b)$. Vis at da finnes det en $c \in [a, b)$ slik at $f(c) = f(a)$, men $f(x) > f(a)$ for alle $x \in (c, b)$.

Hint: $c = \sup\{x \in [a,b] : f(x) \leq f(a)\}$.

SLUTT