UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Mandag, 11. desember 2006.
Tid for eksamen:	15.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

KANDIDATNR. __________

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial z}$ når $f(x, y, z) = xz\sin(yz)$?

☐ $xyz\cos(xyz^2)$
☐ $x\sin(yz) + xyz\cos(yz)$
☐ $xy\cos(yz)$
☐ $x\sin(yz) + xz\cos(yz)$
☐ $\cos(yz) - xyz^2\sin(yz)$

(Fortsettes side 2.)

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y) = 3x^2y + y$ raskest i punktet $(1,-1)$?

☐ $(0,1)$
☐ $(-6,7)$
☐ $(5,4)$
☐ $(1,0)$
☐ $(-3,2)$

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ til funksjonen $f(x,y) = xe^{xy}$ når $\mathbf{a} = (-2,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,1)$:

☐ $3e^{-2}$
☐ $5e^{-2}$
☐ 1
☐ 0
☐ $\frac{3e^{-2}}{2}$

4. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,dx$ er lik:

☐ $\frac{1}{2}\arctan x + C$
☐ $\frac{1}{2}\arctan(2x+1) + C$
☐ $-\frac{1}{2}\cot(2x+1) + C$
☐ $\ln(1+(2x+1)^2) + C$
☐ $\frac{1}{2}\arcsin(2x+1) + C$

5. (3 poeng) Når vi substituerer $u = x^2$ i integralet $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$, får vi

☐ $\int_0^4 \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,du$
☐ $\int_0^4 2ue^u\,du$
☐ $\int_0^4 e^u\,du$
☐ $\int_0^4 e^u\sqrt{u}\,du$
☐ $e^4 - 1$

6. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & -1.2 \end{pmatrix}$$

Den inverse matrisen til $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ er da:

☐ B^{-1}
☐ I_3
☐ A^T
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2.5 & \frac{5}{3} \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0.8 & -1.2 \end{pmatrix}$

(Fortsettes side 3.)

7. (3 poeng) Området under grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ der $x \in [0, 1]$ dreies én gang om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er:

☐ $\frac{4\pi}{5}$
☐ $\frac{4\pi}{3}$
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ 2
☐ π

8. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ er lik:

☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $10\sqrt{2}$
☐ integralet divergerer
☐ e^3
☐ $3\pi^2$

9. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{x^2-1}\,dx$ er lik:

☐ $\ln \frac{1}{|x^2-1|} + C$
☐ $\frac{1}{2x} \ln \frac{1}{|x^2-1|} + C$
☐ $\frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C$
☐ $-\arctan x + C$
☐ $\arctan \frac{1}{x} + C$

10. (3 poeng) Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om linjen $y = -x$. Matrisen til $\mathbf{T}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(Fortsettes side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1
a) (10 poeng) Vis at -2 er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - 2z + 4$. Finn de andre (komplekse) røttene.

b) (10 poeng) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{3x^2+8}{x^3-2x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

c) (10 poeng) Løs integralet $\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx$

Oppgave 2
Et bilutleiefirma har kontor i tre byer A, B og C. Du kan levere tilbake en bil i hvilken by du vil uavhengig av hvor du har leid den. Undersøkelser viser at av de bilene som blir leid i A, blir 60% levert tilbake i A, 30% i B og 10% i C. Av de bilene som blir leid i B, blir 30% levert tilbake i A, 50% i B og 20% i C. Av de bilene som blir leid i C, blir 60% levert tilbake i A, 10% i B og 30% i C.

a) (10 poeng) La x_0, y_0, z_0 være antall biler som var i henholdsvis A, B og C siste gang de ble leid ut, og la

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Finn en matrise M slik at komponentene til vektoren $\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0$ angir hvor mange av bilene som blir levert inn i henholdsvis A, B og C. Finn $\mathbf{r}_1$ dersom

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

b) (10 poeng) Firmaet har ialt 120 biler til utleie. Finn en fordeling av bilene i de tre byene slik at det i hver by leveres tilbake like mange biler som det ble leid ut. Forklar at du nå har funnet en egenvektor for matrisen M. Hva er den tilhørende egenverdien?

Oppgave 3 (10 poeng)
På overflaten til et vann er strømhastigheten i punktet (x, y) ved tiden t gitt ved

$$\mathbf{U}(x,y,t) = \begin{pmatrix} U_1(x,y,t) \\ U_2(x,y,t) \end{pmatrix}$$

(Fortsettes side 5.)

En partikkel som flyter på overflaten, befinner seg ved tiden t i punktet

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Siden partikkelen flyter med vannet, er hastigheten $\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ gitt ved

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{U}(x(t), y(t), t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)$$

Vis at akselerasjonen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ er gitt ved

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t)\, U_1(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t)\, U_2(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t)$$

<u>Notasjon:</u> Vi skriver $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$ for $\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} \end{pmatrix}$ og tilsvarende for $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}$ og $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$.

Oppgave 4 (10 poeng)
I denne oppgaven er $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og vi antar i tillegg at $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

er strengt voksende, så er også funksjonen

$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{\int_0^x g(t)\, dt} \qquad x > 0$$

strengt voksende.

<u>Hint</u>: Sett $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved $F(x)$, $G(x)$, $f(x)$ og $g(x)$. Du kan få bruk for dette resultatet fra *Kalkulus*:

Cauchys middelverdisetning: Anta at $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a, b)$. Dersom $G(b) \neq G(a)$, finnes det et punkt $c \in (a, b)$ slik at

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

(Vi kan få en formel som også gjelder når $G(b) = G(a)$ ved å bruke den litt mindre oversiktlige skrivemåten $(F(b) - F(a))G'(c) = (G(b) - G(a))F'(c)$.)

SLUTT