UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Onsdag, 12. desember 2007.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

KANDIDATNR. __________

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x,y,z) = xe^{yz}$?

☐ xze^{yz}
☐ e^{yz}
☐ xe^{yz}
☐ $e^{yz} + xze^{yz}$
☐ $e^{yz} + xze^{yz} + xye^{yz}$

(Fortsettes side 2.)

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x, y) = 2x^2y$ raskest i punktet $(1, 2)$?

☐ $(8, 1)$
☐ $(1, 8)$
☐ $(8, 2)$
☐ $(8, 6)$
☐ $(6, 8)$

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ til funksjonen $f(x, y) = x^2y + y$ når $\mathbf{a} = (-1, 1)$ og $\mathbf{r} = (2, 1)$:

☐ 0
☐ 6
☐ -2
☐ -3
☐ 4

4. (3 poeng) En trekant har hjørner i punktene $(1, 1)$, $(3, 2)$ og $(4, -2)$. Arealet til trekanten er:

☐ $\frac{9}{2}$
☐ 4
☐ 5
☐ $\frac{7}{2}$
☐ 3

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $(1, 1, -1)$ og $(0, 1, -3)$ er:

☐ $\sqrt{20}$
☐ 5
☐ $\sqrt{14}$
☐ 4
☐ $\sqrt{17}$

6. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene $(2, 1, 0)$, $(1, 0, -3)$, $(-1, 4, 2)$ er:

☐ 20
☐ 30
☐ 22
☐ 25
☐ 27

7. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ er:

☐ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
☐ Matrisen er ikke inverterbar

(Fortsettes side 3.)

8. (3 poeng) Buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \arcsin x$ fra $x = -1$ til $x = 1$ er:

☐ $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\, dx$
☐ $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
☐ $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{(1+x^2)^2}}\, dx$
☐ $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + \frac{1}{\sin^4 x}}\, dx$
☐ $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}\, dx$

9 (3 poeng) Integralet $\int \frac{x-5}{x^2+2x-3}\, dx$ er lik:

☐ $-\ln|x+3| - 3\ln|x-1| + C$
☐ $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| + 4\arctan(x+1) + C$
☐ $(\frac{1}{2}x^2 - 5x)\ln(x^2+2x-3) + C$
☐ $2\ln|x+3| - \ln|x-1| + C$
☐ $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3| + 2\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}}) + C$

10. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$ er lik:

☐ $\ln 4$
☐ 1
☐ Integralet divergerer
☐ $e^{5\pi}$
☐ $e^{e^{\pi/2}}$

(Fortsettes side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1 (10 poeng) Finn alle de komplekse fjerderøttene til $z = -16$.

Oppgave 2 Et bibliotek har tre filialer, A, B og C. Du kan levere tilbake en bok i hvilken filial du vil uavhengig av hvor du har lånt den. Statistikken viser at av de bøkene som blir lånt i filial A, blir 70% returnert i filial A, 20% i filial B og 10% i filial C. Av de bøkene som blir lånt i filial B, blir 30% returnert i filial A, 60% i filial B og 10% i filial C. Av de bøkene som blir lånt i filial C, blir 20% returnert i filial A, 20% i filial B og 60% i filial C.

a) (10 poeng) Finn en matrise M slik at dersom x, y og z er antall bøker som lånes i filialene A, B og C i en lengre periode, og $\mathbf{r}$ er vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

så vil komponentene til vektoren $M\mathbf{r}$ fortelle oss hvor mange av disse bøkene som blir returnert i henholdsvis A, B og C.

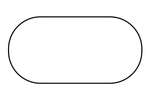
b) (10 poeng) Statistikken viser at 50% av utlånene skjer i filial A, 30% i filial B og 20% i filial C. Hvor stor prosentdel av bøkene blir returnert i filialene A, B og C?

Oppgave 3

a) (10 poeng) Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$ når $f(x) = (1 + x)\arctan x$. Hvor er funksjonen konveks og hvor er den konkav?

b) (10 poeng) Regn ut integralet $I = \int \arctan \sqrt{x}\, dx$.

Oppgave 4 (10 poeng) En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på 1m^2 og være formet som et rektangel med en halvsirkel i høyre og venstre ende (se figur). Rundt hele speilet skal det være en ramme, og den krumme delen av rammen er dobbelt så dyr per centimeter som den rette delen. Hvor stor må radius i halvsirklene være for at rammen skal bli så billig som mulig?



Et speil

Oppgave 5 (10 poeng) En mengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *åpen* dersom det for hver $a \in A$ finnes en $\delta > 0$ slik at $(a - \delta, a + \delta) \subset A$. Vis at intervallet $(0, 1]$ *ikke* er en åpen mengde. Vis også at dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så er mengden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

åpen.

SLUTT