UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 2010.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen innholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt, eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette.
Svarene føres på eget svarark og leveres sammen med resten av besvarelsen. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hver av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige. *Lykke til!*

Del 1

Oppgave 1. (3 poeng). Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ til funksjonen

$$f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2) \text{ er}$$

A $1/(1+x^2+y^2)$
B $2y/(1+x^2+y^2)$
C $2y/(1+x^2+y^2)^2$
D $2y\ln(1+x^2+y^2)$
E $1/(1+2y)$

Oppgave 2. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x,y,z) = x^2+y^2-2z,$$

vokser i punktet $(1,-1,0)$ raskest i retningen
A $(1,2,0)$
B $(2,2,-2)$
C $(-2,2,-2)$
D $(1,-1,-1)$
E $(0,0,1)$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng). Den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ til funksjonen $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$ når $\mathbf{a} = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$ og $\mathbf{r} = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ er

A 0

B $-\pi$

C $-\sqrt{\pi}$

D -2

E -2π

Oppgave 4. (3 poeng). Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $(2,-3)$ og $(1,2)$ er

A 1

B 3

C 5

D 7

E 9

Oppgave 5. (3 poeng). Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{er}$$

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

B $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

C $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. (3 poeng). Integralet

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{er}$$

A $1/3$

B $1/2$

C $2/3$

D 1

E $3/2$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. (3 poeng). Den deriverte til funksjonen (definert for $x > 1$)

$$f(x) = \int_{\ln(x)}^{x} t\sin(t)\,dt \quad \text{er}$$

A 0

B $x\sin(x) - \ln(x)\sin(\ln(x))$

C $x\sin(x) + \ln(x)\cos(\ln(x))/x$

D $x\sin(x) - \ln(x)\sin(\ln(x))/x$

E Funksjonen er ikke deriverbar

Oppgave 8. (3 poeng). Volumet til parallellepipedet uspent av vektorene $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$ og $(0, 2, 0)$ er

A 5

B 4

C 3

D 2

E 1

Oppgave 9. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt, \;\; x \geq 0,$$

A er konveks

B har lokale maksimum i $x = (2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

C har lokale minimum i $x = (2n + 1)\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

D har vendepunkt i $x = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

E er voksende

Oppgave 10. (3 poeng). Følgen gitt ved $a_0 = 0$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n} \quad \text{for } n \geq 0, \text{ er konvergent.}$$

Da blir grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A 0

B $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$

C $\frac{1}{2}(-\sqrt{5} - 1)$

D $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E $e/2$

(Fortsettes på side 4.)

Del 2

Oppgave 11.

a) (10 poeng). Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \ln(1+x^2)\,dx.$$

b) (10 poeng). Regn ut det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx.$$

Oppgave 12. (10 poeng). Skissér området i det komplekse planet gitt ved at $\mathrm{Re}(iz) \geq |z|^2$.

Oppgave 13. (10 poeng). Sett

$$f(x) = \frac{1}{2}x\,|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Hvor er f deriverbar? Hvor er f konveks og hvor er f konkav?

Oppgave 14. (10 poeng). Sett

$$L_n = \lim_{x\to 0^+} x\,(\ln(x))^n\,, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Finn L_0, og vis rekursjonsformelen $L_n = -nL_{n-1}$. Bruk dette til å finne L_n.

Oppgave 15. La A være 3×3 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (10 poeng). Regn ut A^2, A^3 og A^4.

b) (10 poeng). Finn en formel for A^n, og bevis denne formelen ved induksjon.

SLUTT