UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Fredag 9. desember 2011.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x, y) = xy^3 + y^2$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $y^3 + 3xy^2 + 2y$
B) y^3
C) $3xy^2 + 2y$
D) $y^3 + y^2$
E) y^2

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis $f(x, y) = x^3y^2$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1, -1)$ og $\mathbf{r} = (1, 2)$, lik:

A) -7
B) 8
C) -$\frac{1}{2}$
D) -1
E) 12

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) I punktet $(1, -1)$ vokser funksjonen $f(x, y) = xe^{xy^2}$ raskest i retningen:

A) $(1, -3)$
B) $(3, 1)$
C) $(-4, 1)$
D) $(1, -1)$
E) $(-1, -3)$

Oppgave 4. (3 poeng) Hvis en trekant har hjørner i punktene $(1, 0, -2)$, $(2, -1, -2)$, $(1, -3, 1)$, så er arealet:

A) 6
B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
D) 4
E) $\frac{3}{2}$

Oppgave 5. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3-1}{(x^2+1)(x-2)^2}$, må du først:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-2)^2}$
C) polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2}$
E) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{(x-2)^2}$

Oppgave 6. (3 poeng) Dersom du substituerer $u = \arcsin x$ i integralet $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \ln(\arcsin x)\, dx$, får du

A) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \ln(u) \cos u\, du$
B) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(u)}{\sqrt{1-u^2}}\, du$
C) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\, du$
D) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \ln(u) \cos u\, du$
E) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\ln(u)}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

Oppgave 7. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er

A) $\pi^2 - 2\pi$
B) π
C) 2π
D) $\frac{\pi^2}{3}$
E) $\pi + \frac{1}{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) Integralet $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x+1}\,dx$:

A) er lik 8π
B) er lik $10\ln 2$
C) er lik 12π
D) er lik $\frac{5\pi}{4}\ln 2$
E) divergerer

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$:

A) divergerer
B) er lik $\frac{\pi}{4}$
C) er lik $\ln 2$
D) er lik $\sqrt{3}$
E) er lik $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Oppgave 10. (3 poeng) Buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fra $x=-1$ til $x=1$ er:

A) π
B) 4
C) $2\sqrt{3}$
D) $2\pi - 3$
E) $\frac{\pi^2}{3}$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11 (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx$$

Oppgave 12. Den brukte kartongen fra tre kartongfabrikker 1, 2 og 3 samles inn ved to gjenvinningsanlegg A og B og sendes tilbake til fabrikkene uavhengig av hvor den opprinnelig ble produsert. Vi har følgende opplysninger:

(i) Av kartongen fra fabrikk 1 blir 40% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 30% ved anlegg B og resten går tapt.

(ii) Av kartongen fra fabrikk 2 blir 30% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 50% ved anlegg B og resten går tapt.

(iii) Av kartongen fra fabrikk 3 blir 60% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 30% ved anlegg B og resten går tapt.

(iv) Av kartongen som samles inn ved gjennvinningsanlegg A, sendes 40% tilbake til fabrikk 1, 20% til fabrikk 2 og 40% til fabrikk 3.

(v) Av kartongen som samles inn ved gjennvinningsanlegg B, sendes 20% tilbake til fabrikk 1, 50% til fabrikk 2 og 30% til fabrikk 3.

I oppgaven er C og D to matriser med følgende egenskaper: Dersom fabrikkene 1, 2 og 3 produserer henholdsvis x_1, x_2 og x_3 tonn kartong, så er antall tonn y_1 og y_2 som samles inn ved anleggene A og B, gitt ved

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dersom y_1 og y_2 er antall tonn kartong som samles inn ved anleggene A og B, så er antall tonn z_1, z_2 og z_3 som sendes tilbake til fabrikkene 1, 2 og 3, gitt ved

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Finn C og D og regn ut DC.

b) (10 poeng) Anta at fabrikkene 1, 2 og 3 i en periode produserer henholdsvis 3000 tonn, 4000 tonn og 3000 tonn kartong. Hvor mye av denne produksjonen returneres til hver av fabrikkene?

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 13. I denne oppgaven er $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

a) (10 poeng) Vis at f er kontinuerlig.

b) (10 poeng) Finn den deriverte til f for $x \neq 1$. Vis at f er deriverbar i $x = 1$ og finn $f'(1)$.

I resten av oppgaven er $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$$

der f er som ovenfor.

c) (10 poeng) Finn $F'(x)$ og vis at F er strengt voksende.

d) (10 poeng) Finn $F''(x)$ og vis at F er konkav.

SLUTT