UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Tirsdag 11. desember 2012.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis M er matrisen $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, så er M^2 matrisen:

A) $\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 9 & 16 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. (3 poeng) La $f(x, y) = x^5y^7 - 4x^2 + y$. Da er $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ lik:

A) $35x^4y^6 - 8x$
B) $5x^4y^7 - 8x$
C) $5x^4 - 8x$
D) $35x^4y^6 - 8x$
E) $35x^4y^6 - 8x + 1$

Oppgave 3. (3 poeng) Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $(2, 3, -1)$, $(1, 1, 1)$ og $(-1, 2, 3)$ er:

A) 13
B) 11
C) 9
D) 3
E) 1

Oppgave 4. (3 poeng) I punktet $(0, 1, 5)$ vokser funksjonen $f(x, y, z) = e^{2xy} - (1/2)e^{xz}$ raskest i retningen

A) $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$
B) $(\frac{1}{2}, 0, 0)$
C) $(0, 1, 0)$
D) $(0, 1, 1)$
E) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

Oppgave 5. (3 poeng) Hvis $f(x, y) = x^2y - xy^2$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (4, 1)$ og $\mathbf{r} = (1, 1)$ lik:

A) 1
B) 15
C) 3
D) 10
E) -3

Oppgave 6. (3 poeng) Integralet $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\arctan x)^7}{1 + x^2}\, dx$ er lik:

A) $\pi^6 \cdot 2^{18}$
B) $\pi^8 \cdot 3^5$
C) 1
D) 0
E) $\pi^8/2^{19}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. (3 poeng) Jacobimatrisen til funksjonen $\mathbf{F}(x, y) = (xy^2 + 1, xy)$ i punktet $(3, -1)$ er:

A) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 8. (3 poeng) Volumet av omdreieningslegemet som fremkommer når området under grafen til

$$f(x) = (1 - x^2)^{-1/4}$$

på intervallet $[0, 1/2]$ dreies om x-aksen, er:

A) $(1/8)\pi^2$
B) $(1/4)\pi^2$
C) $(1/6)\pi^2$
D) $(2/3)\pi^2$
E) $(2/3)\pi$

Oppgave 9. (3 poeng) La $a \neq 0$ være et gitt, reelt tall. Integralet $\displaystyle\int_0^{1/a} x \sin(\pi a x)\, dx$ er da lik:

A) πa^3
B) πa^2
C) $1/(\pi a^2)$
D) $1/(\pi a^3)$
E) $2/(\pi a^2)$

Oppgave 10. (3 poeng) Arealet av parallellogrammet i planet med hjørner i $(2, 4)$, $(1, 7)$, $(3, 11)$ og origo er:

A) 12
B) 17/2
C) 19/2
D) 10
E) 9

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11 (10 poeng) Finn volumet av omdreiningslegemet som fremkommer når området under grafen til

$$f(x) = e^{x^2}$$

på intervallet $[1, 2]$ dreies om y-aksen.

Oppgave 12. (10 poeng) La funksjonene $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ og $g : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x + \ln x + 2 \quad \text{og} \quad g(x) = e^x$$

for alle $x > 0$. Vis at det finnes et reelt tall $x > 0$ slik at $f(x) = g(x)$.

Oppgave 13. (10 poeng) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{5x^{3/2}}{\ln x + 4x^{5/2}}\, dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 14. (10 poeng) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x + 6 \sin x + 25}\, dx.$$

Oppgave 15. Matematikkurset Mat400 tar hvert år inn nøyaktig 400 studenter. Noen av disse studentene er *nye* studenter, dvs. studenter som ikke har fulgt kurset tidligere. De resterende er *gamle* studenter, dvs. studenter som strøk på kurset i fjor og som nå tar det om igjen. La x_n og y_n være henholdsvis antall nye og antall gamle studenter i år n, der $n = 1, 2, 3, \ldots$. I modellen vår antar vi at 50 % av de nye studentene og 25 % av de gamle studentene stryker på kurset hvert år. Alle studenter som stryker, tar kurset om igjen neste år. I år 1 (første år) er det kun nye studenter på kurset.

a) (10 poeng) Vis at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \text{for alle } n \geq 1,$$

der M er matrisen gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}.$$

b) (10 poeng) Vis at for alle $n \geq 1$ har vi

$$M^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 + 2 \cdot (-1/4)^n & 3 - 3 \cdot (-1/4)^n \\ 2 - 2 \cdot (-1/4)^n & 2 + 3 \cdot (-1/4)^n \end{pmatrix}$$

Bruk dette resultatet til å vise at i følge modellen vil fordelingen av studenter på kurset i det lange løp nærme seg en fordeling der det er ca 240 nye studenter og ca 160 gamle hvert år.

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 16. (10 poeng) Skriv opp epsilon-delta-definisjonen av kontinuitet for en funksjon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ i et gitt punkt $x = a$. Bruk denne definisjonen til å vise at funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ gitt ved $f(x) = 5x^2$ er kontuinuerlig i punktet $x = 1$.

SLUTT