UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Torsdag 12. desember 2013.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark, svarark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGDE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV LØSNINGENE DINE.

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x,y,z) = z + \arctan(xy+1)$, er $\frac{\partial f}{\partial x}$ lik:

A) $\dfrac{x}{1+(xy+1)^2}$

B) $\dfrac{1}{1+(xy+1)^2}$

C) $1 + \dfrac{y}{1+x^2}$

D) $\dfrac{y}{1+(xy+1)^2}$

E) $1 + \dfrac{x}{1+x^2}$

Oppgave 2. (3 poeng) La $\mathbf{r} = (1,0)$ og la $\mathbf{a} = (1,1)$. Hvilken funksjon $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ er slik at den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ av f langs vektoren $\mathbf{r}$ i punktet $\mathbf{a}$ er lik 0?

A) $f(x,y) = x$

B) $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$

(Fortsettes på side 2.)

C) $f(x, y) = \sin(x + y + 1)$
D) $f(x, y) = e^x + e^y$
E) $f(x, y) = |x + y|$

Oppgave 3. (3 poeng) Vinkelen v mellom 4-tuplene $(-1, 2, -2, 4)$ og $(2, -2, 2, -2)$ oppfyller:

A) $\cos v = 1/20$
B) $\cos v = \sqrt{8}$
C) $\cos v = 1$
D) $\cos v = 0$
E) $\cos v = -9/10$

Oppgave 4. (3 poeng) Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $(2, -1, 1)$, $(0, 5, 0)$ og $(0, 0, 1)$ er:

A) 2
B) 4
C) 6
D) 8
E) 10

Oppgave 5. (3 poeng) Hvilken av følgende likninger er korrekt for alle reelle tall x som er slik at uttrykkene på begge sider er definert?

A)$1 + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x}$
B) $\sqrt{x^2} = x$
C) $e^{2 \ln x} = 2$
D) $\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x = \cos^4 x$
E) $\ln |x| = |\ln x|$

Oppgave 6. (3 poeng) Hvis du substituerer $u = \arccos x$ i integralet $\displaystyle\int \arccos x \, dx$, får du:

A) $\int \cos u \, du$
B) $\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$
C) -$\int u \sin u \, du$
D) $\int u \cos u \, du$
E) $\int \frac{\arccos u}{\sqrt{1-u^2}} \, du$

Oppgave 7. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$, dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er:

A) π
B) 2π
C) 3π
D) 4π
E) π^2

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) La $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Da er matrisen M^8 lik:

A) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Oppgave 9. (3 poeng) La $a > 0$ være et reelt tall. Integralet $\displaystyle\int_0^a \frac{1+x}{x^{1/3}}\, dx$ er lik:

A) $(3/2)a^{2/3} - (3/5)a^{5/3}$
B) $(3/2)a^{1/3} - (3/5)a^{3/5}$
C) $(3/2)a^{2/3} + (3/5)a^{5/3}$
D) $(5/3)a^{2/3} - (1/2)a^{5/3}$
E) $(5/3)a^{2/3} + (2/3)a^{5/3}$

Oppgave 10. (3 poeng) La $n > 0$ være et reelt tall. For hvilke verdier av n konvergerer det uegentlige integralet $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^n x}\, dx$?

A) For alle $n \geq 0$
B) For $n \geq 1$
C) For $n < 1$
D) For $n \leq 1$
E) For $n > 1$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11

a) (10 poeng) Finn reell og kompleks faktorisering av polynomet

$$P(z) = z^4 - 8z^2 - 9.$$

b) (10 poeng) La $a \geq 0$ være et reelt tall. Beregn determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -1/8 & a \\ a & 0 & 8 \\ 9 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

c) (10 poeng) Finn verdien av a som gjør at volumet av parallellepipedet utspent av vektorene $\mathbf{x} = (1, -1/8, a)$, $\mathbf{y} = (a, 0, 8)$ og $\mathbf{z} = (9, a^2, 0)$ blir minst mulig.

Oppgave 12. I denne oppgaven er $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{\sin x} & \text{for } x \neq 0 \\ 1 & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

a) (10 poeng) Vis at f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) (10 poeng) Finn eventuelle asymptoter for f.

c) (10 poeng) Vis at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \sin x} = 0.$$

d) (10 poeng) Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$, og beregn $f'(0)$ dersom den fins.

SLUTT