UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1100 — Kalkulus.

Eksamensdag: Onsdag 10. desember 2014.

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 5 sider.

Vedlegg: Svarark, formelark.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Dersom $f(x,y) = x\sin(xy^2)$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $\sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)$
B) $x\cos(xy^2)$
C) $2x^2y\cos(xy^2)$
D) $\sin(xy^2) + 2x^2y^2\cos(xy^2)$
E) $\cos(xy^2)$

Oppgave 2. (3 poeng) Dersom $f(x,y) = xe^{xy}$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1,1)$ og $\mathbf{r} = (-2,1)$, lik:

A) e
B) $7e$
C) -2
D) $12e$
E) $-3e$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) I punktet $(2, -1)$ vokser funksjonen $f(x, y) = x^3y + 2y^2$ raskest i retningen:

A) $(2, -1)$
B) $(-3, 1)$
C) $(1, -2)$
D) $(1, 1)$
E) $(2, 2)$

Oppgave 4. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -1, 3)$ er:

A) 7
B) 10
C) 14
D) 12
E) 15

Oppgave 5. (3 poeng) Integralet $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ er lik:

A) $\arccos x + C$
B) $x \arcsin x + C$
C) $\frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$
D) $\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$
E) $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

Oppgave 6. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}$, må du:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}$
C) først polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D, E slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$
E) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{D}{(x^2+1)^2}$

Oppgave 7. (3 poeng) Den deriverte til funksjonen $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$ er:

A) $\frac{\sin x}{1+x^2}$
B) $\frac{\sin x^2}{1+x^4}$
C) $\frac{x^2 \sin x^2}{1+x^4}$
D) $\frac{2x \sin x^2}{1+x^4}$
E) $2x \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er

A) $2\pi^2$
B) π^3
C) π
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$ er lik:

A) $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$
B) $2\cosh(\sqrt{x}+1) + C$
C) $\ln(x+1) - \ln(\sqrt{x}+1) + C$
D) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} + C$
E) $2\arctan\sqrt{x} + C$

Oppgave 10. (3 poeng) Integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$:

A) er lik -1
B) er lik $-\frac{1}{2}$
C) er lik $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) divergerer
E) er lik $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Finn kvadratrøttene til det komplekse tallet $2 + 2i\sqrt{3}$ og skriv dem på formen $z = a + ib$ der $a, b \in \mathbb{R}$.

b) (10 poeng) Finn løsningene til ligningen

$$iz^2 + 2z - (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}) = 0$$

og skriv dem på formen $z = a + ib$ der $a, b \in \mathbb{R}$.

Oppgave 12. I denne oppgaven er A matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Vis *ved regning* at den inverse matrisen til A er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Du må vise hvordan du kommer frem til svaret ved regning og ikke bare bruke en kalkulator til å invertere matrisen.)

b) (10 poeng) I en innsjø lever det tre fiskeslag X, Y og Z. Vi kan tenke oss den samlede bestanden som en vektor

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

der x er antall fisk av slag X, y er antall fisk av slag Y og z er antall fisk av slag Z. Dersom bestanden et år er $\mathbf{r}$, regner forskerne at bestanden året etter vil være $A\mathbf{r}$. Dersom bestanden et år er

$$\begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix},$$

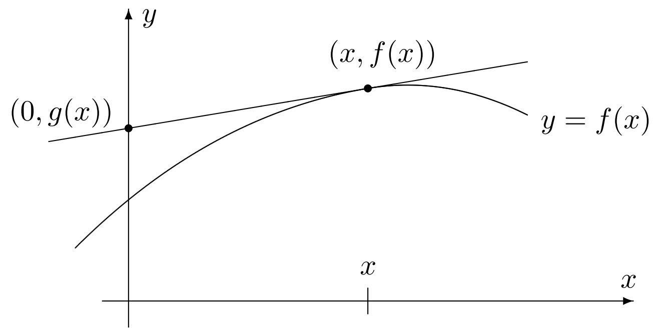
hvor stor var den det *foregående* året?

Oppgave 13 (10 poeng) Løs integralet

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx$$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 14. I denne oppgaven tenker vi oss at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en funksjon med kontinuerlig annenderivert. På figuren har vi tegnet inn tangenten til f i et punkt $(x, f(x))$. Vi lar $g(x)$ være y-koordinaten til det punktet der tangenten skjærer y-aksen.



a) (10 poeng) Vis at $g(x) = f(x) - xf'(x)$. Vis også at dersom f er konkav, så er $g(0)$ den minste verdien til g, og at dersom f er konveks, så er $g(0)$ den største verdien til g.

b) (10 poeng) Vis at

$$\int_0^a g(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx - af(a)$$

for alle $a \in \mathbb{R}$.

SLUTT