UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 11. desember 2015
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) Dersom $f(x,y,z) = x\sin(y+2z) + xy^2$, er $\frac{\partial f}{\partial x}$ lik:

A) $\cos(y+2z) + 2xy$
B) $\sin(y+2x) + x\sin(y+2z) + y^2$
C) $\sin(y+2z) + y^2$
D) $\sin(y+2x) + x\sin(y+2z) + 2xy$
E) $\sin(y+2z) + 2xy$

Oppgave 2. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^3}\,dx$ er lik:

A) 0
B) 1/3
C) 2/3
D) 1
E) 3/2

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) Hvilket utsagn om det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{1+\sin^2 x}{x}\,dx$ er sant:

A) Integralet konvergerer mot 1
B) Integralet konvergerer mot 0
C) Integralet konvergerer mot 1/2
D) Integralet konvergerer mot 1/4
E) Integralet divergerer

Oppgave 4. (3 poeng) La x være et reelt tall. Volumet til parallellepipedet utspent av de tre vektorene $\mathbf{a} = (5, 3, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 4, -6)$ og $\mathbf{c} = (0, 2, x^2)$ er:

A) $14x^2 + 56$
B) $5x^2 + 2$
C) $9x$
D) $2x^2 + 10$
E) $20x^2$

Oppgave 5. (3 poeng) La $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. Gradienten $\nabla f(\sqrt{\pi}, 0, 0)$ til f i punktet $(\sqrt{\pi}, 0, 0)$ er da:

A) $(0, 0, 0)$
B) $(1, 1, 1)$
C) $(-2\sqrt{\pi}, 0, 0)$
D) $2\sqrt{\pi}, 1, 0$
E) $(0, 2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi})$

Oppgave 6. (3 poeng) La $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2)$. Den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (\sqrt{\pi}, 0, 0)$ og $\mathbf{r} = (0, -1, 1)$ er lik:

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) $\sqrt{\pi}$

Oppgave 7. (3 poeng) Substitusjonen $u = \arccos\sqrt{x+1}$ bringer integralet $\int \arccos\sqrt{x+1}\,dx$ over til:

A) $-\int u^2\,du$
B) $-\int u \sin 2u\,du$
C) $\int u\,du$
D) $\int \cos u\,du$
E) $\int u^2 \cos u\,du$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 8. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er:

A) $3\pi/2$
B) $\pi/2$
C) $(\pi/3)(2^{3/2} + 1)$
D) $(2\pi/3)(2^{3/2} - 1)$
E) $(\pi/3)(2^{3/2} - \sqrt{2})$

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int_0^1 \ln(x + 1)\, dx$ er:

A) $\ln 2$
B) $2 \ln 2 - 1$
C) $2(\ln 2 - 1)$
D) $2 \ln 2 + 1$
E) $-\ln 2 + 1 + e^{-1}$

Oppgave 10. (3 poeng) La $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x, y) = (\sin x)e^y$. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x + y| < \delta$ medfører $|f(x, y)| < \epsilon$
B) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $x^2 + y^2 < \delta$ medfører $|f(x, y)| < \epsilon$
C) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|x| < \delta$ medfører $|f(x, y)| < \epsilon$
D) For alle $\epsilon > 0$ fins $\delta > 0$ slik at $|y| < \delta$ medfører $|f(x, y)| < \epsilon$
E) Det fins $\epsilon > 0$ slik at $|f(x, y)| > 0$ for alle (x, y) slik at $x^2 + y^2 < \epsilon$

OPPGAVESETTET FORTSETTER MED DEL 2 PÅ NESTE SIDE

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11.

a) (10 poeng) Finn reelle tall k og r slik at vi for alle reelle tall x har

$$x^2 + 8x + 20 = r\left[\left(\frac{x+k}{\sqrt{r}}\right)^2 + 1\right],$$

og bruk dette til å beregne integralet

$$\int \frac{1}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Hint: Hvis $m > 1$ er et helt tall, kan du bruke formelen

$$\int \frac{du}{(1+u^2)^m} = \frac{1}{2(m-1)}\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2(m-1)}\int \frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}.$$

b) (10 poeng) Beregn integralet

$$\int \frac{x+5}{(x^2+8x+20)^2}\,dx.$$

Oppgave 12. Lille Per har overtalt foreldrene sine til at familien skal begynne med kaninavl. For at det ikke skal bli for mange kaniner, skal de selge kaninene når de fyller 3 år. Alle kaninene fødes om våren, og vi regner dem som 0 år gamle den første sommeren de lever. La x_n, y_n og z_n være henholdsvis antall 0 år, 1 år og 2 år gamle hunkaniner som familien har i sommersesong n, der $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Familien har også noen hankaniner, men disse teller vi ikke. Vi antar at hver hunkanin som er ett år en gitt sommer, føder to hunkaninunger neste vår. Hunkaniner som er 0 eller 2 år en gitt sommer, får ingen unger den neste våren. Vi antar at ingen av hunkaninene dør før de selges.

a) (10 poeng) Begrunn at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

der

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) (10 poeng) Finn determinanten til M, og avgjør om M er inverterbar.

(Fortsettes på side 5.)

c) (10 poeng) Finn matrisen M^4.

d) (10 poeng) Finn matrisen M^{2n}, der n er et positivt heltall.

e) (10 poeng) Anta at lille Per starter med 1 hunkanin som er 0 år gammel i sommersesong 0. Hvor mange hunkaniner vil familien ha i sesong n, der $n > 0$ er et helt tall?

SLUTT