UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 9. desember 2016
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

SVARENE I DENNE DELEN SKAL FØRES INN PÅ DET VEDLAGTE SVARARKET SOM LEVERES SAMMEN MED RESTEN AV BESVARELSEN.

Oppgave 1. (3 poeng) La $f(x,y) = x^3y$. Den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (3,1)$ og $\mathbf{r} = (1,-1)$ er lik:

A) 0
B) 9
C) 27
D) 36
E) 49

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis $\mathbf{a} = (2+i, 2i, 5)$ og $\mathbf{b} = (1+4i, 3, 1-i)$, så er det komplekse skalarproduktet $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ lik:

A) 0
B) $3+10i$
C) $11+4i$
D) $11-2i$
E) $5-4i$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. (3 poeng) Matrisen

$$\mathbf{F}' = \begin{pmatrix} y\cos x & \sin x \\ 3x^2y & x^3 \end{pmatrix}$$

er Jacobimatrisen til hvilken av disse funksjonene:

A) $\mathbf{F}(x,y) = (y\sin x, x^3y)$
B) $\mathbf{F}(x,y) = (x^3y, y\sin x)$
C) $\mathbf{F}(x,y) = (y\sin x, 6xy)$
D) $\mathbf{F}(x,y) = (6xy, -y\sin x)$
E) $\mathbf{F}(x,y) = (y^2\sin x, \frac{1}{2}x^3y^2)$

Oppgave 4. (3 poeng) Volumet til pyramiden utspent av de tre vektorene $\mathbf{a} = (1,1,1)$, $\mathbf{b} = (2,-2,4)$ og $\mathbf{c} = (3,0,3)$ er:

A) 0
B) 1
C) 2
D) 3
E) 4

Oppgave 5. (3 poeng) Den inverse til matrisen $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$ er:

A) $\frac{1}{31}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/8 & 1/5 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. (3 poeng) Et fly flyr rett frem i konstant høyde 12 000 meter. Det passerer rett over et radiofyr på bakken. Når flyet har beveget seg 9 km horisontalt bort fra radiofyret, øker avstanden mellom flyet og fyret med 600 km per time. Flyets hastighet i forhold til bakken er da:

A) 850 km/h
B) 900 km/h
C) 950 km/h
D) 1000 km/h
E) 1050 km/h

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 7. (3 poeng) Det finnes konstanter A, B og C slik at brøken

$$\frac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)}$$

kan spaltes opp slik:

A) $\dfrac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

B) $\dfrac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

C) $\dfrac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x^2} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$

D) $\dfrac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x-1}$

E) $\dfrac{12x^2 - 5x + 7}{x^2(x-1)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x^3}$

Oppgave 8. (3 poeng) Integralet $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \arctan(\sin x)\, dx$ er lik:

A) $\pi/2$
B) $\pi + \ln 4$
C) $\pi - \ln 2$
D) $\pi + \ln 2$
E) $\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\ln 2$

Oppgave 9. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos(1/x)}{x^2}\, dx$ er lik:

A) 0
B) 1
C) $\sin 1$
D) $\cos 1$
E) e

Oppgave 10. (3 poeng) La $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ være en funksjon. Hvilket av følgende utsagn er sant:

A) Hvis f er integrerbar på $[a,b]$, så er f kontinuerlig på $[a,b]$
B) Hvis f er deriverbar på (a,b), så er f integrerbar på $[a,b]$
C) Hvis f er integrerbar på $[a,b]$, så finnes det for alle $\epsilon > 0$ en øvre trappesum S og en nedre trappesum s for f på $[a,b]$ slik at $|S-s| < \epsilon$
D) Hvis f er integrerbar på $[a,b]$, så finnes det $\epsilon > 0$ slik at hvis S er en øvre trappesum og s er en nedre trappesum for f på $[a,b]$, så er $|S-s| < \epsilon$
E) Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$, så finnes det $\epsilon > 0$ slik at hvis S er en øvre trappesum og s er en nedre trappesum for f på $[a,b]$, så er $|S-s| < \epsilon$

(Fortsettes på side 4.)

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 11. La $P(z)$ være polynomet gitt ved

$$P(z) = z^3 - 13z^2 + 52z - 70$$

a) (10 poeng) Vis at $z = 3 + i$ er en rot til $P(z)$, og finn de øvrige røttene til $P(z)$.

b) (10 poeng) Finn den komplekse faktoriseringen til $P(z)$ og den reelle faktoriseringen til $P(z)$.

Oppgave 12. La funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være definert ved

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^3 & 3x & 1 \\ e^{x^3} & 0 & 0 \\ x^2 & x & -1 \end{vmatrix}$$

a) (10 poeng) La $a > 0$. Vis at volumet V av omdreiningslegemet som fås når grafen til f på intervallet $[0, a]$ roteres om x-aksen, er gitt ved

$$V = 16\pi \int_0^a x^2 e^{2x^3}\, dx.$$

b) (10 poeng) Finn V ved å beregne integralet i a).

Oppgave 13.

a) (10 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to 0^+} x(\ln x)^2$$

b) (10 poeng) La $f : (-\infty, 1) \to \mathbf{R}$ være funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(\ln x)^2} & \text{for } x \in (0,1) \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

Vis at f er kontinuerlig.

c) (10 poeng) La $g : (-\infty, 1) \to \mathbf{R}$ være funksjonen definert ved

$$g(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Avgjør om g er to ganger deriverbar i $x = 0$, altså om $g''(0)$ eksisterer.

SLUTT