UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Tirsdag 4. desember 2018
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til $f(x) = \cos x$ på intervallet $[0, \pi/2]$ dreies om y-aksen.

Oppgave 2. La $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være gitt ved $f(x, y, z) = e^{5xy} + \sin z$.

a) Finn gradienten $\nabla f(\mathbf{0})$ til f i punktet $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$.

b) La $\mathbf{r} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Finn den retningsderiverte

$$f'(\mathbf{0}; \mathbf{r})$$

av f i retningen gitt av $\mathbf{r}$. I hvilken retning ut fra punktet $\mathbf{0}$ er den retningsderiverte av f størst?

Oppgave 3. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $f(x) = \arctan(x^2)$.

a) Finn eventuelle lokale og globale ekstremalpunkter for f.

b) Finn eventuelle asymptoter for f. Avgjør hvor f er konveks og konkav, og finn eventuelle vendepunkter.

La $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved $g(x, y) = \arctan(x^2) + e^{y^2}$.

c) Finn de partielle deriverte til g.

d) Bestem eventuelle ekstremalpunkter for g.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. Vi studerer en koloni av en spesiell dyreart, og vi deler dyrene i tre aldersklasser: Unge, voksne og gamle. La x_n, y_n og z_n være antall unge, voksne og gamle dyr ved tidspunkt $t = n$, der tiden t regnes i måneder og $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

I modellen vår antar vi at hvert ungt dyr gir opphav til 3 nye unge dyr neste måned. Videre overlever 80 % av de unge dyrene selv til neste måned, og disse er da voksne. Hvert voksent dyr gir opphav til 10 unge dyr neste måned. Av de voksne overlever 50 % til neste måned, og disse er da gamle. Alle gamle dyr er døde neste måned, og de gir ikke opphav til noen nye dyr.

a) Finn en (3×3)-matrise M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

Avgjør om M er inverterbar.

b) Multiplikasjon med matrisen M tilsvarer å regne seg en måned fremover i tiden. Finn en matrise A slik at multiplikasjon med A tilsvarer å regne seg 3 måneder fremover i tiden. Finnes det en matrise B for å regne seg en måned bakover i tiden?

Oppgave 5.

a) Finn det ubestemte integralet

$$\int \frac{x}{\sqrt{1 - x^4}}\, dx$$

b) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2 - \sin x}\, dx$$

konvergerer eller divergerer.

Oppgave 6. La $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være funksjonen gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y} - 1 \\ x^2 + y \end{pmatrix}$$

Finn Jacobimatrisen til $\mathbf{F}$. Begrunn at det fins en (2×2)-matrise M slik at

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\mathbf{F}(x, y) - M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \mathbf{0}.$$

Slutt