UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Mandag 30. november 2020
Tid for eksamen:	15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle hjelpemidler tillatt

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 12 deloppgaver som teller 6 poeng hver. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ være gitt ved

$$f(x, y, z) = xy^2z^3.$$

I hvilken retning ut fra punktet $(1, 1, 1)$ er den retningsderiverte av f størst?

Oppgave 2. La $0 < a < b$. Finn volumet av omdreiningslegemet som fås når området under grafen til

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

på intervallet $[a, b]$ dreies om x-aksen. Finn også $0 < a < b$ slik at volumet er 100.

Oppgave 3. Finn et eksempel på et ubestemt integral som kan løses ved å bruke substitusjonen

$$u = \arctan 7x$$

Løs så integralet ditt.

Oppgave 4. Finn et eksempel på en følge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ av reelle tall som er strengt voksende og som konvergerer mot 5.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5. Finn det komplekse tallet z som er slik at modulus til z er $|z| = 4$, og den ene kvadratroten til z har argument $\theta = \pi/3$. Skriv z på formen $z = a + ib$.

Oppgave 6. Finn en funksjon $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = z \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = x$$

Oppgave 7. Vi studerer et plantesamfunn, og vi deler plantene i tre aldersklasser: Nyspirte, unge og voksne. La x_n, y_n og z_n være antall nyspirte planter, unge planter og voksne planter ved tidspunkt $t = n$, der tiden t regnes i år og $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

I modellen vår antar vi at hver ungplante og voksen plante gir frø til 1 nyspirt plante neste år. Nyspirte planter gir ikke frø til nye planter. Alle de nyspirte plantene overlever til neste år, og de er da ungplanter. Videre overlever 80 % av ungplantene til neste år, og disse er da voksne. Av de voksne plantene overlever 60 % til neste år.

a) Begrunn at overgangsmatrisen M slik at

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \qquad \text{for } n \geq 0.$$

er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

b) Fins det en matrise N slik at

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = N \cdot \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix}$$

for alle $n \geq 0$? (Husk at du må begrunne svaret og vise eventuell regning som brukes underveis.)

c) Anta nå i stedet at hver ungplante gir frø til 2 nyspirte planter neste år, men at kun halvparten av de unge plantene overlever til neste år. Ellers er modellen som før. Finn overgangsmatrisen M i dette tilfellet.

Oppgave 8. Vis at hvis $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en to ganger deriverbar funksjon slik at $f'(0) = f(0)$ og $f'(1) = f(1)$, så fins $c \in (0, 1)$ slik at

$$f'(c) = f''(c).$$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 9. La $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være funksjonen gitt ved

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \dfrac{1}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) Begrunn at f er kontinuerlig i $x = 0$.

b) Avgjør om f er deriverbar i $x = 0$.

SLUTT