Løsningsforslag for Eksamen i MAT 100, H-03

Del 1

1. Integralet $\int x \cos(x^2)\, dx$ er lik:
Riktig svar: b) $\frac{1}{2}\sin(x^2) + C$. Begrunnelse: Vi setter $u = x^2$, $du = 2x\, dx$ og får:

$$\int x\cos(x^2)\, dx = \int \frac{1}{2}\cos u\, du = \frac{1}{2}\sin u + C = \frac{1}{2}\sin(x^2) + C$$

2. Integralet $\int \ln(x^2+1)\, dx$ er lik:
Riktig svar: c) $x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$. Begrunnelse: Vi bruker delvis integrasjon med $u = \ln(x^2+1)$ og $v' = 1$. Da er $u' = \frac{2x}{x^2+1}$ og $v = x$, og vi får:

$$I = \int \ln(x^2+1)\, dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\, dx$$

For å komme videre må vi enten bruke polynomdivisjon på $\frac{2x^2}{x^2+1}$ eller observere at $\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+2-2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$ (dette er det samme uttrykket som polynomdivisjon ville ha gitt oss). Dermed har vi

$$I = x\ln(x^2+1) - \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$$

3. Når vi substituerer $u = \arcsin x$ i integralet $\int_0^{1/2} e^{\arcsin x}\, dx$, får vi:
Riktig svar: a) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos u\, e^u\, du$. Begrunnelse: Med $u = \arcsin x$ blir $x = \sin u$ og dermed $dx = \cos u\, du$. De nye grensene blir $u(0) = \arcsin 0 = 0$ og $u(\frac{1}{2}) = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. Altså er:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{\arcsin x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos u\, e^u\, du$$

4. Når vi skal bruke delbrøkoppspalting på uttrykket $\frac{x^2+2x-4}{(x-1)^3(x^2+x+5)}$, bør vi sette det lik:
Riktig svar: d) $\frac{A}{x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{Dx+E}{x^2+x+5}$. Begrunnelse: Se læreboken side 399.

5. Det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx$:
Riktig svar: d) Konvergerer og er lik $\frac{\pi}{2}$. Begrunnelse: Vi har $\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx$. Substituerer vi $u = \ln x$ i integralet $\int_1^b \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx$, får vi $\int_0^{\ln b} \frac{1}{1+u^2}\, du = \arctan(\ln b)$. Siden $\ln b \to \infty$ når $b \to \infty$, gir dette:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \arctan(\ln b) = \frac{\pi}{2}$$

6. Hvis $F(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t}\, dt$, så er $F'(x)$ lik:
Riktig svar: e) $\frac{2\sin(x^2)}{x}$. Begrunnelse: Vi setter $G(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$. Ifølge

analysens fundamentalteorem er da $G'(x) = \frac{\sin x}{x}$. Siden $F(x) = G(x^2)$, gir kjerneregelen

$$F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = \frac{\sin(x^2)}{x^2} \cdot 2x = \frac{2\sin(x^2)}{x}$$

7. Finn den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$, når $f(x,y) = \arctan(x^2y)$:
Riktig svar: c) $\frac{2xy}{1+x^4y^2}$. Begrunnelse: Vi deriverer som om y var en konstant:

$$\frac{\partial}{\partial x}\arctan(x^2y) = \frac{1}{1+(x^2y)^2} \cdot 2xy = \frac{2xy}{1+x^4y^2}$$

8. Hvis $f(x,y) = 3x^2y + 6xy^3$, $\mathbf{a} = (2,1)$, $\mathbf{r} = (3,-1)$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ lik:
Riktig svar: c) 6. Begrunnelse: Vi finner først gradienten til f:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6xy + 6y^3, 3x^2 + 18xy^2)$$

Setter vi inn $(x,y) = (2,1)$, får vi $\nabla f(2,1) = (6\cdot 2\cdot 1 + 6\cdot 1^3, 3\cdot 2^2 + 18\cdot 2\cdot 1^2) = (18,48)$. Dermed er

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = (18,48)\cdot(3,-1) = 54 - 48 = 6$$

9. I hvilken retning vokser $f(x,y) = 6xy + 7x^2y$ raskest når du står i punktet $(-1,2)$:
Riktig svar: a) $(-16,1)$. Begrunnelse: Funksjonen vokser fortest i den retningen gradienten peker. Vi finner derfor gradienten til f:

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (6y + 14xy, 6x + 7x^2)$$

Setter vi inn $(x,y) = (-1,2)$, får vi $\nabla f(-1,2) = (6\cdot 2 + 14\cdot(-1)\cdot 2, 6\cdot(-1) + 7\cdot(-1)^2) = (-16,1)$. Funksjonen vokser altså raskest i retningen $(-16,1)$.

10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ er lik:
Riktig svar: c) finnes ikke. Begrunnelse: Skifter vi til polarkoordinater, får vi:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

Dette uttrykket får forskjellige verdier for forskjellige valg av θ. Det betyr at vi får forskjellige grenseverdier når vi nærmer oss origo fra forskjellige retninger. Grenseverdien eksisterer derfor ikke.

Del 2

Oppgave I: a) Vi finner først de partiellderiverte:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 2y - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 4y + 6$$

Setter vi de to partiellderiverte lik null, får vi ligningssettet:

$$6x + 2y = 2 \text{ og } 2x + 4y = -6$$

Vi løser disse ligningene og får $x = 1$, $y = -2$. Det stasjonære punktet er altså $(1, -2)$.

b) Vi skal bruke annenderiverttesten og regner derfor ut de annenderiverte: $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 4$. Dette gir $A = 6$, $B = 2$, $C = 4$ og $D = AC - B^2 = 24 - 4 = 20$. Siden $D > 0$ og $A > 0$, er $(1, -2)$ et lokalt minimum.

Oppgave II: a) Vi setter $z = 1 + i$ inn i polynomet:

$$P(1+i) = (1+i)^3 - (1+i)^2 + 2 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3 - 1 - 2i - i^2 + 2 =$$

$$= 1 + 3i - 3 - i - 1 - 2i + 1 + 2 = 0$$

Siden polynomet er reelt, må også det konjugerte tallet $\overline{z} = 1 - i$ være rot i polynomet. Dette betyr at $P(z)$ er delelig med $(z - (1+i))(z - (1-i)) = z^2 - 2z + 2$. Utfører vi polynomdivisjonen $P(z) : (z^2 - 2z + 2)$, får vi

$$P(z) = (z^2 - 2z + 2)(z + 1)$$

som er den reelle faktoriseringen til $P(z)$. Den komplekse faktoriseringen er

$$P(z) = (z - 1 - i)(z - i + i)(z + 1)$$

b) Multipliserer vi ligningen med fellesnevneren $(x+1)(x^2 - 2x + 2)$, får vi:

$$4x^2 - x + 5 = A(x^2 - 2x + 2) + (Bx + C)(x + 1) =$$

$$= Ax^2 - 2Ax + 2A + Bx^2 + Bx + Cx + C = (A+B)x^2 + (-2A+B+C)x + (2A+C)$$

Sammenligner vi koeffisientene på begge sider, ser vi at vi må ha:

$$A + B = 4 \text{ og } -2A + B + C = -1 \text{ og } 2A + C = 5$$

Dette ligningssystemet løser vi lettest ved først observere at den første og siste ligningen gir oss hhv. $B = 4 - A$ og $C = 5 - 2A$. Setter vi dette inn i den midterste ligningen, får vi $-2A + (4 - A) + (5 - 2A) = -1$, som gir $A = 2$. Fra dette følger det at $B = 2$ og $C = 1$. Altså er

$$\frac{4x^2 - x + 5}{(x+1)(x^2 - 2x + 5)} = \frac{2}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 2}$$

c) Vi observerer først at den deriverte av nevneren er $N'(x) = (x^2 - 2x + 2)' = 2x - 2$. Første etappe er å smugle dette uttrykket inn i telleren:

$$\int \frac{2x+1}{x^2 - 2x + 2}\, dx = \int \frac{2x - 2 + 3}{z^2 - 2x + 2}\, dx =$$

$$= \int \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 2}\, dx + \int \frac{3}{x^2 - 2x + 2}\, dx$$

I det første integralet setter vi $u = x^2 - 2x + 2$ og får $du = (2x - 2)\, dx$. Dermed er:

$$\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln(x^2 - 2x + 2) + C$$

Det gjenstår å regne ut den andre delen. Vi fullfører kvadratet i nevneren:

$$\begin{aligned} \int \frac{3}{x^2-2x+2}\, dx &= \int \frac{3}{x^2-2x+1+1}\, dx = \\ &= \int \frac{3}{(x-1)^2+1}\, dx = \int \frac{3}{v^2+1}\, dv = \\ &= 3 \arctan v + C = 3\arctan(x-1) + C \end{aligned}$$

der vi har brukt substitusjonen $v = x - 1$, $dx = dv$.

Setter vi nå bitene sammen, ser vi at

$$\int \frac{2x+1}{x^2-2x+2}\, dx = \ln(x^2 - 2x + 2) + 3\arctan(x-1) + C$$

Oppgave III: La x være grunnlinjen i rektangelet. Da er resten av grunnlinjen til trekanten $1 - x$ og høyden i rektangelet er $h = (1-x)\tan 30^\circ = (1-x)\frac{\sqrt{3}}{3}$. Dermed er arealet til rektangelet gitt ved

$$A(x) = x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}(1-x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - x^2)$$

Deriverer vi dette uttrykket, får vi:

$$A'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(1-2x)$$

Dette uttrykket er null for $x = \frac{1}{2}$, og det er lett å se at dette må være maksimumspunktet til A(x) (de to andre mulige kandidatene er endepunktene $x = 0$ og $x = 1$, men de gir $A = 0$). Maksimalverdien er dermed

$$A(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

Oppgave IV: Bruker vi (*) med $y = 1$, får vi

$$f(x \cdot 1) = f(x) + f(1)$$

og siden $f(x \cdot 1) = f(x)$, gir dette $f(1) = 0$. Vi observerer så at

$$f(x+h) = f(x(1 + \frac{h}{x})) = f(x) + f(1 + \frac{h}{x})$$

For å finne $f'(x)$ bruker vi definisjonen av den deriverte:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{x}) - f(1)}{h}$$

der vi har brukt at $f(x+h) - f(x) = f(1+\frac{h}{x})$ og $f(1) = 0$. Setter vi nå $\Delta x = \frac{h}{x}$, får vi:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x \cdot x} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

Siden $\Delta x \to 0$ når $h \to 0$, ser vi at

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(1) = k$$

Dermed er

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot f'(1) = \frac{k}{x}$$

Denne ligningen medfører at f er en antiderivert til $\frac{k}{x}$. Siden den generelle antideriverte er $k \ln x + C$, er $f(x) = k \ln x + C$ for en eller annen C. Siden $f(1) = 0$, må $k \ln(1) + C = 0$, og siden $ln(1) = 0$, betyr dette at $C = 0$. Altså er $f(x) = k \ln x$.

Kommentar: Noen finner den deriverte ved hjelp av L'Hopitals regel på denne måten (husk kjerneregelen når du deriverer $f(1 + \frac{h}{x})$ mhp. h):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+\frac{h}{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(1+\frac{h}{x})\frac{1}{x}}{1} = f'(1)\frac{1}{x} = \frac{k}{x}$$

Dette er en smart ide (som opplagt gir plusspoeng), men helt fullgod er denne løsningen ikke siden den forutsetter at $f'(x)$ eksisterer for $x \neq 1$ og at f' er kontinuerlig i punktet 1. Dette er mer enn vi vet fra (*) og (**).