Løsningsforslag til eksamen i MAT 1100, 8/12-04

Del 1

1. (3 poeng) Integralet $\int xe^x \, dx$ er lik:

☐ $xe^x - e^x + C$

☐ $\frac{x^2}{2}e^x + C$

☐ $\frac{x^3}{3}e^x + C$

☐ $e^{x^2/2} + C$

☐ $\frac{x^2}{2}e^x - \frac{x^3}{3}e^x + C$

Riktig svar: a) $xe^x - e^x + C$.
Begrunnelse: Bruker delvis integrasjon med $u = x$, $v' = e^x$. Da er $u' = 1$, $v = e^x$, og vi får:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \cdot e^x \, dx = xe^x - e^x + C$$

2. (3 poeng) Hva gjør vi først når vi skal løse integralet $\int \frac{x^4+3x^2-x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} \, dx$ ved delbrøkoppspalting?

☐ substituerer $u = x^2 + 2x + 2$

☐ setter integranden lik $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$

☐ smugler den deriverte av nevneren inn i telleren

☐ polynomdividerer $x^4 + 3x^2 - x + 2$ med $x^3 + x^2 - 2$

☐ setter integranden lik $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+2x+2}$

Riktig svar: d) polynomdividerer $x^4 + 3x^2 - x + 2$ med $x^3 + x^2 - 2$
Begrunnelse: Graden til telleren er større enn graden til nevneren. Observer dessuten at $(x-1)(x^2+2x+2) = x^3 + x^2 - 2$.

3. (3 poeng) Hva får vi når vi substituerer $u = \arctan x$ i integralet $\int_0^1 \sin(\arctan x) \, dx$?

☐ $\int_{\pi/4}^{\pi/3} 2 \sin u \, du$

☐ $\int_0^1 \frac{\sin u}{1+u^2} \, du$

☐ $-\int_0^{\pi/4} \sin u \, du$

☐ $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{1+u^2} \, du$

☐ $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{\cos^2 u} \, du$

Riktig svar: e) $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{\cos^2 u} \, du$
Begrunnelse: Når $u = \arctan x$, er $x = \tan u$. Dermed er $dx = \frac{1}{\cos^2 u} \, du$. De nye grensene blir $u(0) = \arctan 0 = 0$ og $u(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$. Dette gir:

$$\int_0^1 \sin(\arctan x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin u}{\cos^2 u} \, du$$

4. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x, y, z) = z \cot(xy)$?

☐ $\frac{xz}{\cos^2(xy)}$

☐ $\frac{xz}{1+x^2z^2}$

☐ $\frac{xz}{\sqrt{1-x^2z^2}}$

- [ ] $zx\tan(xy)$
- [ ] $-\frac{xz}{\sin^2(xy)}$

Riktig svar: e) $-\frac{xz}{\sin^2(xy)}$
Begrunnelse: Deriverer mhp. y som om x og z er konstanter:

$$\frac{\partial}{\partial y} z\cot(xy) = z\left(-\frac{1}{\sin^2(xy)}\cdot x\right) = -\frac{xz}{\sin^2(xy)}$$

5. (3 poeng) I hvilken retning vokser funksjonen $f(x,y) = xy\cos y$ raskest i punktet $(-1,\pi)$:

- [ ] $(1,4\pi)$
- [ ] $(2\pi,1)$
- [ ] $(0,1)$
- [ ] (π,π)
- [ ] $(-\pi,1)$

Riktig svar: e) $(-\pi,1)$
Begrunnelse: Funksjonen vokser raskest i gradientens retning. Siden $\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos y$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y - xy\sin y$, er

$$\nabla f(-1,\pi) = (\pi\cos\pi, (-1)\cos\pi - (-1)\pi\sin\pi) = (-\pi,1)$$

6. (3 poeng) Hva er den retningderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ når $f(x,y) = xe^{xy}$, $\mathbf{a} = (2,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,1)$?

- [ ] 4
- [ ] $-e^{-1}$
- [ ] e^2
- [ ] $3e^2$
- [ ] e^3

Riktig svar: c) e^2
Begrunnelse: Vi vet at $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r}$. Siden $\nabla f(x,y) = (e^{xy}+xye^{xy}, x^2e^{xy})$, får vi

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = (3e^2,4e^2)\cdot(-1,1) = -3e^3 + 4e^2 = e^2$$

7. (3 poeng) Området mellom x-aksen og grafen til $f(x) = \sin(x^2)$, $0 \le x \le \sqrt{\pi}$, dreies en gang om y-aksen. Hva er volumet til omdreiningslegemet?

- [ ] $\frac{13}{2}$
- [ ] $\frac{9\pi}{4}$
- [ ] $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
- [ ] 2π
- [ ] $\frac{7}{3}e$

Riktig svar: d) 2π
Begrunnelse: Ifølge formelen for volumet til et omdreiningslegeme om y-aksen er

$$V = 2\pi\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)\,dx$$

Vi substituerer $u = x^2$. Da er $du = 2xdx$, og de nye grensene er gitt ved $u(0) = 0^2 = 0$, $u(\sqrt{\pi}) = (\sqrt{\pi})^2 = \pi$. Dermed er

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin(x^2)\, dx = \pi \int_0^{\pi} \sin u \, du = 2\pi$$

8. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_e^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$:

- ☐ konvergerer og er lik $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- ☐ konvergerer og er lik 2
- ☐ divergerer
- ☐ konvergerer og er lik $\sqrt{5}$
- ☐ konvergerer og er lik $\frac{5}{2}$

Riktig svar: c) divergerer
Begrunnelse: Vi har $\int_e^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx$. Substituerer vi $u = \ln x$, er $du = \frac{dx}{x}$, og de nye grensene blir $u(e) = \ln e = 1$, $u(b) = \ln b$. Demed er

$$\int_e^\infty \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_e^b \frac{1}{x(1+\ln x)}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\ln b} \frac{1}{(1+u)}\, dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} [\ln(1+u)]_1^{\ln b} = \lim_{b\to\infty} [\ln(1+\ln b) - \ln 2] = \infty$$

9. (3 poeng) Hva er grenseverdien $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin(\frac{\pi}{2n} i)$?

- ☐ $\frac{7\pi}{22}$
- ☐ $\frac{\pi}{3}$
- ☐ $\frac{\pi^2}{10}$
- ☐ 1
- ☐ $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

Riktig svar: d) 1
Begrunnelse: Uttrykket er en Riemann-sum for funksjonen $f(x) = \sin x$ over intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$. Når $n \to \infty$, nærmer uttrykket seg derfor integralet til $f(x)$ over dette intervallet. Dermed har vi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^n \sin(\frac{\pi}{2n} i) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

10. (3 poeng) I en regulerbar gasstank er trykket P gitt som en funksjon $P = F(V, T)$ av volumet V og temperaturen T. Dersom V og T er funksjoner av tiden t slik at $V(t) = 1 + e^{-t/10}$ og $T(t) = 20 + 6\sin(\frac{\pi}{12} t)$, hva er da den deriverte av trykket P med hensyn på tiden t?

- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t), T(t)) + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t), T(t))$
- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t), T(t))(1 + e^{-t/10}) + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t), T(t))(20 + 6\sin(\frac{\pi}{12} t))$
- ☐ $P'(t) = -\frac{1}{10} \frac{\partial F}{\partial V}(V(t), T(t)) e^{-t/10} + \frac{\pi}{2} \frac{\partial F}{\partial T}(V(t), T(t)) \cos(\frac{\pi}{12} t)$
- ☐ $P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t), T(t)) e^{-t/10} + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t), T(t)) \cos(\frac{\pi}{12} t)$
- ☐ $P'(t) = -\frac{1}{10} V(t) e^{-t/10} + \frac{\pi}{2} T(t) \cos(\frac{\pi}{12} t)$

Riktig svar: c) $P'(t) = -\frac{1}{10}\frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t))e^{-t/10} + \frac{\pi}{2}\frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))\cos(\frac{\pi}{12}t)$.
Begrunnelse: Kjerneregelen sier

$$P'(t) = \frac{\partial F}{\partial V}(V(t),T(t))V'(t) + \frac{\partial F}{\partial T}(V(t),T(t))T'(t)$$

Setter vi inn $V'(t) = -\frac{1}{10}e^{-t/10}$ og $T'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{12}t)$, får vi svaret,

DEL 2

Oppgave 1:
a) (10 poeng) Regn ut de partiellderiverte av første orden til funksjonen

$$f(x,y) = (x+y^2)e^x$$

og finn det stasjonære punktet.

b) (10 poeng) Avgjør om det stasjonære punktet er et sadelpunkt, et lokalt maksimum eller et lokalt minimum.

Svar: a) Vi har

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot e^x + (x+y^2)e^x = (1+x+y^2)e^x$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^x$$

I de stasjonære punktene er

$$(1+x+y^2)e^x = 0 \qquad \text{og} \qquad 2ye^x = 0$$

Den siste ligningen er bare oppfylt når $y=0$. Setter vi dette inn i den første, ser vi at $x=-1$. Det eneste stasjonære punktet er altså $(-1,0)$.

b) Vi regner først ut de annenordens partiellderiverte:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 1\cdot e^x + (1+x+y^2)e^x = (2+x+y^2)e^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2ye^x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 2e^x$$

Dette gir $A = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(-1,0) = e^{-1}$, $B = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,0) = 0$, $C = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(-1,0) = 2e^{-1}$, $D = AC - B^2 = e^{-1}\cdot 2e^{-1} - 0^2 = 2e^{-2}$. Siden $D>0$, $A>0$, forteller annenderiverttesten oss at dette er et lokalt minimum.

Oppgave 2:
a) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du$$

b) (10 poeng) Regn ut integralet

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

(<u>Hint:</u> Vis først at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$.)

c) (10 poeng) Finn buelengden til grafen til funksjonen $f(x) = \ln(\cos x)$ fra $x = 0$ til $x = \frac{\pi}{6}$. (Husk at formelen for buelengde er $L = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.)

Svar: a) Siden $u^2 - 1 = (u-1)(u+1)$, bruker vi delbrøkoppspalting:

$$\frac{1}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1}$$

Ganger vi med fellesnevneren u^2-1 og ordner leddene på høyre side, får vi:

$$1 = (A+B)u + (A-B)$$

Dette betyr at $A+B=0$, $A-B=1$, som medfører $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$. Dermed er

$$\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \int \frac{\frac{1}{2}}{u-1}\,du - \int \frac{\frac{1}{2}}{u+1}\,du =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|u-1| - \frac{1}{2}\ln|u+1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$$

b) Vi har $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$. Substituerer vi $u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$ i integralet $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$, får vi

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2}\,du$$

Legg merke til de nye integrasjonsgrensene som skyldes at $u(0) = \sin 0 = 0$, $u(\frac{\pi}{6}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Bruker vi del a), har vi nå:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2}\,du = -\left[\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{2}+1}\right| + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{0-1}{0+1}\right| = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} = \frac{1}{2}\ln 3$$

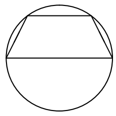
b) Vi regner først ut $f'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\frac{\sin x}{\cos x}$. Dermed er buelengden gitt ved

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+(-\frac{\sin x}{\cos x})^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}\,dx =$$

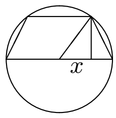
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos x}\, dx = \frac{1}{2} \ln 3$$

der vi har brukt punkt b) i det siste skrittet.

Oppgave 3: (10 poeng) På figuren ser du en sirkel med radius r. Et trapes er tegnet inn i sirkelen slik at grunnlinjen til trapeset er en diameter i sirkelen. De to andre hjørnene til trapeset ligger på sirkelomkretsen. Finn det største arealet et slikt trapes kan ha.



Svar: Regnstykket blir litt forskjellig etter hva man velger som variabel. Et valg som gir greie regninger, er å definere x som på figuren nedenfor.



Da blir høyden i trapeset $h = \sqrt{r^2 - x^2}$, og arealet er gitt ved

$$A(x) = \frac{2r + 2x}{2} \cdot h = (r + x)\sqrt{r^2 - x^2}$$

Vi ønsker altså finne den maksimale verdien til den kontinuerlige funksjonen $A(x)$ på det lukkede og begrensede intervallet $[0, r]$. Vi vet fra ekstremalverdisetningen at det må finnes en maksimalverdi.

For å finne maksimumspunktet, deriverer vi:

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + (r + x)\frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}} = \sqrt{r^2 - x^2} - (r + x)\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Vi setter dette uttrykket lik 0 og løser for x:

$$\sqrt{r^2 - x^2} - (r + x)\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0 \Longrightarrow \sqrt{r^2 - x^2} = (r + x)\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \Longrightarrow$$

$$r^2 - x^2 = rx + x^2 \Longrightarrow 2x^2 + rx - r^2 = 0 \Longrightarrow$$

$$x = \frac{-r \pm \sqrt{r^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-r^2)}}{2 \cdot 2} = \frac{-r \pm 3r}{4}$$

Av geometriske grunner kan vi bare bruke den positive roten $x = \frac{r}{2}$ som gir et areal på $A(\frac{r}{2}) = (r + \frac{r}{2})\sqrt{r^2 - \frac{r^2}{4}} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$. De andre mulige maksimalpunktene til arealet er endepunktene $x = 0$ og $x = r$. Siden begge disse verdiene er mindre enn $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$ (vi har $A(0) = r^2$ og $A(r) = 0$), må det største arealet være $\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$.

Oppgave 4: (10 poeng) Funksjonen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er kontinuerlig, og $a, b \in \mathbf{R}$ er tall slik at $a < b$ og $f(a) < f(b)$. Vis at da finnes det en $c \in [a, b)$ slik at $f(c) = f(a)$, men $f(x) > f(a)$ for alle $x \in (c, b)$.

Hint: $c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}$.

Svar: Mengden $A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}$ er ikke-tom (fordi a er med) og begrenset (av b), og har derfor en minste øvre skranke

$$c = \sup\{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}$$

Observer at siden b er en øvre skranke for A, er $c \leq b$.

Per definisjon av c er $f(x) > f(a)$ for alle $x \in (c, b)$, og det er derfor nok for oss å vise

(*) $f(c) = f(a)$

(i tillegg burde vi vise at $c < b$, men det vil følge automatisk av at $f(c) = f(a) < f(b)$).

For å vise (*) observerer vi først at for hver $n \in \mathbf{N}$ må det finnes en x_n slik at $c - \frac{1}{n} \leq x_n \leq c$ og $f(x_n) \leq f(a)$ (ellers ville $c - \frac{1}{n}$ vært en øvre skranke for A og det er umulig siden $c - \frac{1}{n}$ er mindre enn den *minste* øvre skranken c). Siden $x_n \to c$, må $f(x_n) \to f(c)$ (her bruker vi at f er kontinuerlig). Siden $f(x_n) \leq f(a)$, må dermed $f(c) \leq f(a)$. Observer at dette medfører at $c < b$. For tilstrekkelig stor $n \in \mathbf{N}$ må da $c + \frac{1}{n} < b$ og ifølge definisjonen av c betyr dette at $f(c + \frac{1}{n}) > f(a)$. Siden $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(c + \frac{1}{n})$ (her bruker vi igjen kontinuiteten til f), medfører dette at $f(c) \geq f(a)$. Vi har dermed vist både $f(c) \leq f(a)$ og $f(c) \geq f(a)$, og følgelig må $f(c) = f(a)$.

SLUTT