Kort løsningsforslag til avsluttende eksamen i MAT 1100, Høst 2005

Del 1

1. Integralet $\int \frac{dx}{x^2-9}$ er lik:

☐ $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+3}{x-3}\right| + c$ ☐ $\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} + c$ ☒ $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

☐ $\frac{1}{3}\arctan x + c$ ☐ $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| + c$

Delbrøkoppspalting gir

$$\frac{1}{x^2-9} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right).$$

2. Hvis $f(x,y) = x\ln y$, $\mathfrak{a} = (1,e)$ og $\mathfrak{r} = (1,1)$ så er den retningsderiverte $f'(\mathfrak{a};\mathfrak{r})$ lik:

☐ 0 ☐ $\frac{1}{2} + \frac{e^2}{2}$ ☐ $\frac{1}{2} + \frac{e}{2}$ ☒ $1 + e^{-1}$ ☐ $1 - e$

Gradienten $\nabla f = (\ln y, \frac{x}{y})$ slik at

$$f'((1,e);(1,1)) = \nabla f(1,e)\cdot(1,1) = (1,e^{-1})\cdot(1,1) = 1 + e^{-1}.$$

3. Mengden $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$ er

☒ Lukket ☐ Åpen ☐ Hverken lukket eller åpen

Mengden er lukket siden den inneholder alle sine randpunkter.

4. Når $f(x,y) = \int_x^y e^{\sin t}dt$ er $\frac{\partial f}{\partial x}$ lik:

☐ $\sin t$ ☒ $-e^{\sin x}$ ☐ $e^{-\sin t}$ ☐ $e^{\sin x}$ ☐ $\cos y\, e^{\sin x}$

Vi har

$$f(x,y) = -\int_y^x e^{\sin t}dt.$$

Analysens fundamentalteorem gir derfor svaret.

5. I kulekoordinater (ρ,θ,ϕ) kan likningen $x^2+y^2 = z^2$ skrives som:

☐ $\rho = 1$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\phi = \pi$ ☐ $\theta = \frac{\pi}{2}$ og $\theta = 0$ ☐ $\rho = \theta = \phi$

☒ $\phi = \frac{\pi}{4}$ eller $\phi = \frac{3\pi}{4}$ ☐ $\rho = 1$

Skriver vi om $x^2+y^2 = z^2$ i kulekoordinater får vi $\rho^2\sin^2\phi = \rho^2\cos^2\phi$. Siden $0 \le \phi \le \pi$ er løsningene gitt ved $\phi = \frac{\pi}{4}$ eller $\phi = \frac{3\pi}{4}$.

SLUTT PÅ DEL 1

Del 2

Oppgave I

a) Substitusjonen $u = 2005x - 1$ gir svaret $\frac{-1}{2005}\cdot(2005x-1)^{-1} + c$.
b) Substitusjonen $u = x^{5/2} + 1$ gir svaret $\frac{-2}{5}\cos(x^{5/2}+1) + c$.
c) Delvis integrasjon gir svaret $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$.

Oppgave II

a) I polarkoordinater er $(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) = r^2 \ln r^2 = 2r^2 \ln r$. L'Hôpitals regel gir svaret

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\ln r}{r^{-2}} = \lim_{r\to 0} \frac{\frac{1}{r}}{-r^{-3}} = -\lim_{r\to 0} r^2 = 0.$$

b) Svarene er $\frac{\partial f}{\partial x} = -y \sin xy + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin xy + \frac{1}{2\sqrt{x+y+z}} + e^z$.

Oppgave III

a) Vi har $f(1,1) = \ln 2$, $f(e,0) = 2$. Funksjonen er en sammensetning av to kontinuerlige funksjoner. Den er derfor kontinuerlig.
b) Nivåkurvene bestemt av $f(x,y) = c$ er sirkler av radius e^c.
c) $\nabla f = (\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2})$ slik at $\nabla f(1,1) = (1,1)$. Det betyr at funksjonen vokser hurtigst langs linjen $x = y$.

Oppgave IV

a) I mangel av betegnelser og figur: Lar vi b være bredden i akvariet får vi $lbh = 5000$. Som funksjon av l, b og h er kostnadsfunksjonen $f(l,b,h)$ gitt ved

$$f(l,b,h) = 1300lh + b(600h + 500l).$$

Spesielt gir $f(l, \frac{5000}{lh}, h)$ det oppgaven ber oss om å bevise.
b) Partiell derivasjon gir $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial h} = 0$ hvis og bare hvis

$$13 = \frac{30000}{l^2 h} = \frac{25000}{lh^2}.$$

Utregning gir $l = \frac{6h}{5} = \frac{60}{\sqrt[3]{78}}$. Annenderiverttesten viser at dette gir et lokalt minimumspunkt. Siden $l, h \neq 0$ får vi et minimumspunkt.

SLUTT