Løsningsforslag til eksamen i MAT 1100, H06

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial z}$ når $f(x,y,z) = xz\sin(yz)$?
- ☐ $xyz\cos(xyz^2)$
- ☐ $x\sin(yz) + xyz\cos(yz)$
- ☐ $xy\cos(yz)$
- ☐ $x\sin(yz) + xz\cos(yz)$
- ☐ $\cos(yz) - xyz^2\sin(yz)$

Riktig svar b): $x\sin(yz) + xyz\cos(yz)$
Begrunnelse: Bruk produktregelen og kjerneregelen:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x \cdot 1 \cdot \sin(yz) + xz\cos(yz) \cdot y = x\sin(yz) + xyz\cos(yz)$$

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x,y) = 3x^2y + y$ raskest i punktet $(1,-1)$?
- ☐ $(0,1)$
- ☐ $(-6,7)$
- ☐ $(5,4)$
- ☐ $(1,0)$
- ☐ $(-3,2)$

Riktig svar e): $(-3,2)$
Begrunnelse: Funksjonen vokser raskest den veien gradienten peker, så vi finner først gradienten:

$$\nabla f(x,y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (6xy, 3x^2+1)$$

Dette gir $\nabla f(1,-1) = (-6,4) = 2(-3,2)$. Funksjonen vokser altså raskest i retningen $(-3,2)$.

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ til funksjonen $f(x,y) = xe^{xy}$ når $\mathbf{a} = (-2,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,1)$:
- ☐ $3e^{-2}$
- ☐ $5e^{-2}$
- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $\frac{3e^{-2}}{2}$

Riktig svar b): $5e^{-2}$
Begrunnelse: Vi skal bruke formelen $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$ og finner derfor først $\nabla f(x,y) = ((1+xy)e^{xy}, x^2e^{xy})$. Dermed er $\nabla f(\mathbf{a}) = (-e^{-2}, 4e^{-2})$ og

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = (-e^{-2}, 4e^{-2}) \cdot (-1,1) = 5e^{-2}$$

4. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,dx$ er lik:
- ☐ $\frac{1}{2}\arctan x + C$

☐ $\frac{1}{2}\arctan(2x+1)+C$
☐ $-\frac{1}{2}\cot(2x+1)+C$
☐ $\ln(1+(2x+1)^2)+C$
☐ $\frac{1}{2}\arcsin(2x+1)+C$

Riktig svar b): $\frac{1}{2}\arctan(2x+1)+C$
Begrunnelse: Vi substituerer $u=2x+1$. Da er $dx=\frac{du}{2}$, og vi får

$$\int \frac{1}{1+(2x+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \frac{1}{2}\arctan u + C = \frac{1}{2}\arctan(2x+1)+C$$

5. (3 poeng) Når vi substituerer $u=x^2$ i integralet $\int_0^2 e^{x^2}\,dx$, får vi
☐ $\int_0^4 \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,du$
☐ $\int_0^4 2ue^u\,du$
☐ $\int_0^4 e^u\,du$
☐ $\int_0^4 e^u\sqrt{u}\,du$
☐ e^4-1

Riktig svar a): $\int_0^4 \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,du$
Begrunnelse: Løser vi ligningen $u=x^2$ for x, får vi $x=\sqrt{u}$ som gir $dx=\frac{1}{2\sqrt{u}}\,du$. De nye grensene blir $u(0)=0^2=0$ og $u(2)=2^2=4$. Dermed er

$$\int_0^2 e^{x^2}\,dx = \int_0^4 \frac{e^u}{2\sqrt{u}}\,du$$

6. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ er

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & -1.2 \end{pmatrix}$$

Den inverse matrisen til $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ er da:

☐ B^{-1}
☐ I_3
☐ A^T
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2.5 & \frac{5}{3} \\ 0 & 5 & 5 \\ -1 & \frac{5}{4} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0.8 & -1.2 \end{pmatrix}$

Riktig svar e): $\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0.8 & -1.2 \end{pmatrix}$

Begrunnelse: Observer at $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = A^T$. Siden $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T=$

B^T, har vi dermed

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -0.4 & 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.2 & -1.2 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ -1 & 0.8 & -1.2 \end{pmatrix}$$

7. (3 poeng) Området under grafen til funksjonen $f(x) = \sqrt{x}$ der $x \in [0,1]$ dreies én gang om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er:

☐ $\frac{4\pi}{5}$
☐ $\frac{4\pi}{3}$
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ 2
☐ π

Riktig svar a): $\frac{4\pi}{5}$
Begrunnelse: Volumet er gitt ved

$$V = 2\pi \int_0^1 x f(x)\, dx = 2\pi \int_0^1 x^{\frac{3}{2}}\, dx = 2\pi \left[\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{5}$$

8. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^2}\, dx$ er lik:

☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $10\sqrt{2}$
☐ integralet divergerer
☐ e^3
☐ $3\pi^2$

Riktig svar c): integralet divergerer
Begrunnelse: Vi har

$$\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{b^2} \frac{1}{1+u}\, du =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \Big[\ln(1+u)\Big]_1^{b^2} = \lim_{b\to\infty} \Big(\ln(1+b^2) - \ln 2\Big) = \infty$$

der vi har brukt substitusjonen $u = x^2$.

9. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx$ er lik:

☐ $\ln \frac{1}{|x^2-1|} + C$
☐ $\frac{1}{2x} \ln \frac{1}{|x^2-1|} + C$
☐ $\frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
☐ $-\arctan x + C$
☐ $\arctan \frac{1}{x} + C$

Riktig svar c): $\frac{1}{2} \ln \left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$
Begrunnelse: Siden $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, kan vi bruke delbrøkoppspaltingen

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

som gir $A = \frac{1}{2}$ og $B = -\frac{1}{2}$. Dermed har vi

$$\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx - \int \frac{\frac{1}{2}}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

der vi har brukt logaritmeregelen $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$ i siste trinn.

10. (3 poeng) Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om linjen $y = -x$. Matrisen til $\mathbf{T}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Riktig svar e): $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Begrunnelse: Vi vet at søylene i matrisen er vektorene $T(\mathbf{e}_1)$ og $T(\mathbf{e}_2)$. Siden $T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ (tegn en figur!) og $T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, får vi matrisen $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ SVARENE VÆRE BEGRUNNET FOR Å GI POENG!

Oppgave 1

a) (10 poeng) Vis at -2 er en rot i polynomet $P(z) = z^3 - 2z + 4$. Finn de andre (komplekse) røttene.

Løsning: Vi har $P(-2) = (-2)^3 - 2\cdot(-2) + 4 = -8 + 4 + 4 = 0$. Deler vi $P(z)$ på $z+2$ (polynomdivisjon), får vi $P(z) = (z+2)(z^2 - 2z + 2)$. De andre røttene får vi dermed ved å løse annengradsligningen $z^2 - 2z + 2 = 0$. Den har røttene

$$z = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

Røttene til $P(z)$ er derfor -2, $1+i$ og $1-i$.

b) (10 poeng) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{3x^2+8}{x^3-2x+4} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2-2x+2}$$

Løsning: Ganger vi med fellesnevneren $x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$, får vi

$$3x^2+8 = A(x^2-2x+2)+(Bx+C)(x+2) = Ax^2-2Ax+2A+Bx^2+2Bx+Cx+2C =$$

$$= (A+B)x^2 + (-2A + 2B + Cx) + 2A + 2C$$

Skal disse uttrykkene være like for alle x, må vi ha

$$A + B = 3, \qquad -2A + 2B + C = 0, \qquad 2A + 2C = 8$$

Fra den første og tredje ligningen har vi hhv. $B = 3 - A$ og $C = 4 - A$, og setter vi dette inn i den midterste ligningen, får vi

$$-2A + 2(3 - A) + (4 - A) = 0$$

som gir $A = 2$. Dette medfører at $B = 3 - A = 1$ og $C = 4 - A = 2$. Følgelig er

$$\frac{3x^2+8}{x^3-2x+4} = \frac{2}{x+2} + \frac{x+2}{x^2-2x+2}$$

c) (10 poeng) Løs integralet $\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx$
Løsning: Den deriverte av nevneren er $2x - 2$, og vi starter med å "smugle" denne inn i telleren

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{6}{x^2-2x+2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx + \int \frac{3}{x^2-2x+2}\,dx$$

Det første av disse integralene løser vi ved å sette $u = x^2 - 2x + 2$. Da er $du = (2x-2)\,dx$, og vi får

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du = \frac{1}{2}\ln|u| + C = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + C$$

I det andre integralet må vi fullføre kvadratet:

$$\int \frac{3}{x^2-2x+2}\,dx = \int \frac{3}{(x-1)^2+1}\,dx$$

Setter vi $v = x - 1$, får vi $dv = dx$ og dermed

$$\int \frac{3}{(x-1)^2+1}\,dx = \int \frac{3}{v^2+1}\,dv = 3\arctan v + C = 3\arctan(x-1) + C$$

I alt har vi dermed

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + 3\arctan(x-1) + C$$

Oppgave 2
Et bilutleiefirma har kontor i tre byer A, B og C. Du kan levere tilbake en bil

i hvilken by du vil uavhengig av hvor du har leid den. Undersøkelser viser at av de bilene som blir leid i A, blir 60% levert tilbake i A, 30% i B og 10% i C. Av de bilene som blir leid i B, blir 30% levert tilbake i A, 50% i B og 20% i C. Av de bilene som blir leid i C, blir 60% levert tilbake i A, 10% i B og 30% i C.

a) (10 poeng) La x_0, y_0, z_0 være antall biler som var i henholdsvis A, B og C siste gang de ble leid ut, og la

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

Finn en matrise M slik at komponentene til vektoren $\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0$ angir hvor mange av bilene som blir levert inn i henholdsvis A, B og C. Finn $\mathbf{r}_1$ dersom

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Løsning: Vi får

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Dette gir

$$\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0.6x_0 + 0.3y_0 + 0.6z_0 \\ 0.3x_0 + 0.5y_0 + 0.1z_0 \\ 0.1x_0 + 0.2y_0 + 0.3z_0 \end{pmatrix}$$

som stemmer med opplysningene i oppgaven. Med $\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix}$, får vi

$$\mathbf{r}_1 = M\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \cdot 70 + 0.3 \cdot 30 + 0.6 \cdot 20 \\ 0.3 \cdot 70 + 0.5 \cdot 30 + 0.1 \cdot 20 \\ 0.1 \cdot 70 + 0.2 \cdot 30 + 0.3 \cdot 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63 \\ 38 \\ 19 \end{pmatrix}$$

b) (10 poeng) Firmaet har ialt 120 biler til utleie. Finn en fordeling av bilene i de tre byene slik at det i hver by leveres tilbake like mange biler som det ble leid ut. Forklar at du nå har funnet en egenvektor for matrisen M. Hva er den tilhørende egenverdien?

Løsning: Vi må finne en vektor $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ slik at $x + y + z = 120$ og $M\mathbf{r} = \mathbf{r}$.

Skriver vi ut den siste ligningen på komponentform, får vi

$$0.6x + 0.3y + 0.6z = x$$

$$0.3x + 0.5y + 0.1z = y$$

$$0.1x + 0.2y + 0.3z = z$$

Rydder vi opp litt i disse ligningen (samler ledd og ganger med 10), får vi

$$-4x + 3y + 6z = 0 \tag{1}$$

$$3x - 5y + z = 0 \tag{2}$$

$$x + 2y - 7z = 0 \tag{3}$$

I tillegg har vi altså

$$x + y + z = 120 \tag{4}$$

Dette kan se litt skummelt ut — vi har fire ligninger med tre ukjente og kan bare fromt ønske at det finnes en løsning! Vi løser tre av ligningene og håper at resultatet passer i den fjerde. Siden ligning (4) er den eneste som forteller oss at det finnes 120 biler totalt, bør vi i hvert fall ha med den i løsningsforsøket vårt.

Her er én måte å løse systemet på (den finnes mange andre). Fra (3) ser vi at $x = -2y + 7z$, Setter vi dette inn i (1), får vi

$$-4(-2y + 7z) + 3y + 6z = 0$$

som etter litt opprydning gir $y = 2z$. Setter vi dette inn i uttrykket $x = -2y+7z$, får vi $x = -2 \cdot (2z) + 7z = 3z$, Vi setter så $x = 3z$, $y = 2z$ inn i ligning (4), og får:

$$3z + 2z + z = 120$$

som gir $z = 20$. Dermed er $x = 3 \cdot 20 = 60$ og $y = 2 \cdot 20 = 40$. Vi må sjekke at dette virkelig er en løsning av ligningssystemet (1)-(4) (spesielt må vi sjekke ligning (2) som vi ikke brukte i utledningen), men det viser det seg at det er. For å få en"likevektsstilling" der det i hver by returneres like mange biler som det leies ut, må vi altså plassere 60 biler i A, 40 biler i B og 20 biler i C.

Setter vi $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 60 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix}$, har vi nettopp vist at

$$M\mathbf{r} = \mathbf{r} = 1 \cdot \mathbf{r}$$

som viser at $\mathbf{r}$ er en egenvektor med egenverdi 1.

Oppgave 3 (10 poeng)
På overflaten til et vann er strømhastigheten i punktet (x, y) ved tiden t gitt ved

$$\mathbf{U}(x, y, t) = \begin{pmatrix} U_1(x, y, t) \\ U_2(x, y, t) \end{pmatrix}$$

En partikkel som flyter på overflaten, befinner seg ved tiden t i punktet

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Siden partikkelen flyter med vannet, er hastigheten $\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ gitt ved

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{U}(x(t), y(t), t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)$$

Vis at akselerasjonen $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \end{pmatrix}$ er gitt ved

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t)\, U_1(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t)\, U_2(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t)$$

Notasjon: Vi skriver $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$ for $\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x} \end{pmatrix}$ og tilsvarende for $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}$ og $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}$.

Løsning: Vi skal finne den deriverte til

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{U}(x(t), y(t), t) = \mathbf{U}(\mathbf{r}(t), t)$$

Dette er en sammensatt funksjon, og vi må bruke kjerneregelen enten på matriseform eller på komponentform. Matriseform gir minst skriving, så vi velger den. Den "ytre funksjonen" i sammensetningen er $\mathbf{U}(x, y, t) = \begin{pmatrix} U_1(x, y, t) \\ U_2(x, y, t) \end{pmatrix}$ som har Jacobi-matrise

$$\mathbf{U}'(x, y, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x}(x, y, t) & \frac{\partial U_1}{\partial y}(x, y, t) & \frac{\partial U_1}{\partial t}(x, y, t) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x}(x, y, t) & \frac{\partial U_2}{\partial y}(x, y, t) & \frac{\partial U_2}{\partial t}(x, y, t) \end{pmatrix}$$

Den "indre funksjonen" er $\mathbf{G}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ t \end{pmatrix}$ som har Jacobi-matrise

$$\mathbf{G}'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Kjerneregelen gir nå

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \mathbf{U}'(\mathbf{G}(t))\mathbf{G}'(t) =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t) & \frac{\partial U_1}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t) & \frac{\partial U_1}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t) \\ \frac{\partial U_2}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t) & \frac{\partial U_2}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t) & \frac{\partial U_2}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t)\, x'(t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t)\, y'(t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t)$$

Til slutt bruker vi at $x'(t) = U_1(\mathbf{r}(t), t)$ og $y'(t) = U_2(\mathbf{r}(t), t)$, og får

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(\mathbf{r}(t), t)\, U_1(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(\mathbf{r}(t), t)\, U_2(\mathbf{r}(t), t) + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}(\mathbf{r}(t), t)$$

Oppgave 4 (10 poeng)
I denne oppgaven er $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ to kontinuerlige funksjoner, og vi antar i tillegg at $g(x) > 0$ for alle $x \in [0, \infty)$. Vis at dersom funksjonen

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

er strengt voksende, så er også funksjonen

$$H(x) = \frac{\int_0^x f(t)\, dt}{\int_0^x g(t)\, dt} \qquad x > 0$$

strengt voksende.

Hint: Sett $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ og $G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$, og finn først $H'(x)$ uttrykt ved $F(x)$, $G(x)$, $f(x)$ og $g(x)$. Du kan få bruk for dette resultatet fra *Kalkulus*:

Cauchys middelverdisetning: Anta at $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$ er to kontinuerlige funksjoner som er deriverbare i alle indre punkter $x \in (a,b)$. Dersom $G(b) \neq G(a)$, finnes det et punkt $c \in (a,b)$ slik at

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)}$$

(Vi kan få en formel som også gjelder når $G(b) = G(a)$ ved å bruke den litt mindre oversiktlige skrivemåten $(F(b) - F(a))G'(c) = (G(b) - G(a))F'(c)$.)

Løsning: Vi finner først $H'(x)$. Siden $F'(x) = f(x)$ og $G'(x) = g(x)$ ifølge analysens fundamentalteorem, gir brøkregelen

$$H'(x) = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G(x)^2} = \frac{f(x)G(x) - F(x)g(x)}{G(x)^2}$$

For å vise at H er strengt voksende, er det nok å vise at $H'(x) > 0$ for alle $x > 0$. Siden $G(x)^2 > 0$, har vi

$$H'(x) > 0 \iff f(x)G(x) - F(x)g(x) > 0 \iff \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{F(x)}{G(x)}$$

(i den siste overgangen har vi brukt antagelsen om at g — og dermed G — er strengt positiv). Det er derfor nok å vise at $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{F(x)}{G(x)}$.

Ifølge Cauchys middelverdisetning er

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(0)}{G(x) - G(0)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

for en $c \in (0,x)$ (her har vi brukt at $F(0) = G(0) = 0$). Siden $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ er strengt voksende, er dermed

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} < \frac{f(x)}{g(x)}$$

og beviset er fullført.

SLUTT