# Løsningsforslag til eksamen i MAT 1100 — H07

## DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x, y, z) = xe^{yz}$?

☐ $xze^{yz}$
☐ $e^{yz}$
☐ $xe^{yz}$
☐ $e^{yz} + xze^{yz}$
☐ $e^{yz} + xze^{yz} + xye^{yz}$

Riktig svar: a) $xze^{yz}$
Begrunnelse: Deriver mhp. y og husk å bruke kjerneregelen.

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x, y) = 2x^2y$ raskest i punktet $(1, 2)$?

☐ $(8, 1)$
☐ $(1, 8)$
☐ $(8, 2)$
☐ $(8, 6)$
☐ $(6, 8)$

Riktig svar: c) $(8, 2)$
Begrunnelse: Funksjonen vokser raskest i den retningen som gradienten peker. Generelt er $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (4xy, 2x^2)$. I punktet vi er interessert i, er dermed $\nabla f(1, 2) = (4 \cdot 1^2 \cdot 2, 2 \cdot 1^2) = (8, 2)$.

3. (3 poeng) Hva er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ til funksjonen $f(x, y) = x^2y+y$ når $\mathbf{a} = (-1, 1)$ og $\mathbf{r} = (2, 1)$:

☐ $0$
☐ $6$
☐ $-2$
☐ $-3$
☐ $4$

Riktig svar: c) -2.
Begrunnelse: Vi har $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$. Siden gradienten er gitt ved $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2xy, x^2 + 1)$, får vi $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r} = (2 \cdot (-1) \cdot 1, (-1)^2 + 1) \cdot (2, 1) = -4 + 2 = -2$.

4. (3 poeng) En trekant har hjørner i punktene $(1, 1)$, $(3, 2)$ og $(4, -2)$. Arealet til trekanten er:

☐ $\frac{9}{2}$
☐ $4$
☐ $5$
☐ $\frac{7}{2}$
☐ $3$

Riktig svar: a) $\frac{9}{2}$
Begrunnelse: Trekanten er utspent av vektorene $(3,2)-(1,1)=(2,1)$ og $(4,-2)-(1,1)=(3,-3)$. Determinanten generert av disse vektorene er $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 2(-3)-3\cdot 1=-9$. Arealet er halvparten av tallverdien til determinanten, altså $\frac{9}{2}$.

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $(1,1,-1)$ og $(0,1,-3)$ er:
☐ $\sqrt{20}$
☐ 5
☐ $\sqrt{14}$
☐ 4
☐ $\sqrt{17}$

Riktig svar: c) $\sqrt{14}$
Begrunnelse: Vektorproduktet av vektorene er

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-3+1)\mathbf{i} - (-3+0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Arealet er lik lengden av vektorproduktet, som er $\sqrt{(-2)^2+3^2+1^2} = \sqrt{14}$.

6. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene $(2,1,0)$, $(1,0,-3)$, $(-1,4,2)$ er:
☐ 20
☐ 30
☐ 22
☐ 25
☐ 27

Riktig svar: d) 25
Begrunnelse: Determinanten utspent av vektorene er

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 0 = 2\cdot 12 - (2-3) = 25$$

7. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ er:
☐ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
☐ Matrisen er ikke inverterbar

Riktig svar: d) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Begrunnelse: Vi prøver å finne en høyreinvers $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+z & 2y+u \\ x+3z & y+3u \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningene $2x+z=1, x+3z=0, 2y+u=0, y+3u=1$, som har løsninger $x=\frac{3}{5}$, $z=-\frac{1}{5}$, $y=-\frac{1}{5}$, $u=\frac{2}{5}$. Dermed er $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ er høyreinvers, og følgelig en invers.

8. (3 poeng) Buelengden til grafen til funksjonen $f(x)=\arcsin x$ fra $x=-1$ til $x=1$ er:

☐ $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx$
☐ $\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
☐ $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{(1+x^2)^2}}\,dx$
☐ $\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\frac{1}{\sin^4 x}}\,dx$
☐ $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2x}{1-x^2}}\,dx$

Riktig svar: a) $\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx$

Begrunnelse: Vi har

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-x^2}+\frac{1}{1-x^2}}\,dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx$$

9 (3 poeng) Integralet $\int\frac{x-5}{x^2+2x-3}\,dx$ er lik:

☐ $-\ln|x+3|-3\ln|x-1|+C$
☐ $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3|+4\arctan(x+1)+C$
☐ $(\frac{1}{2}x^2-5x)\ln(x^2+2x-3)+C$
☐ $2\ln|x+3|-\ln|x-1|+C$
☐ $\frac{1}{2}\ln|x^2+2x-3|+2\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{2}})+C$

Riktig svar: d) $2\ln|x+3|-\ln|x-1|+C$

Begrunnelse: Siden nevneren kan faktoriseres $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$, bruker vi delbrøkoppspalting:

$$\frac{x-5}{(x+3)(x-1)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$$

Multipliserer vi med $(x+3)(x-1)$ på begge sider, ser vi at

$$x-5=A(x-1)+B(x+3)=(A+B)x+(-A+3B)$$

som gir ligningene $A + B = 1, -A + 3B = -5$. Vi får $A = 2$ og $B = -1$, og følgelig er

$$\int \frac{x-5}{x^2+2x-3}\,dx = \int \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x-1}\right) dx = 2\ln|x+3| - \ln|x-1| + C$$

10. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$ er lik:

- ☐ $\ln 4$
- ☐ $1$
- ☐ Integralet divergerer
- ☐ $e^{5\pi}$
- ☐ $e^{e^{\pi/2}}$

Riktig svar: c) Integralet divergerer.
Begrunnelse: Observer først at integranden går mot uendelig når $x \to \frac{\pi}{2}^-$. Siden $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, kan vi løse integralet ved substitusjonen $u = \cos x$, $du = -\sin x\, dx$. Vi får

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int \frac{1}{u}\, du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Dermed er

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \int_0^b \tan x\, dx = \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} \Big[-\ln|\cos x|\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b \to \frac{\pi}{2}^-} (-\ln|\cos b| + 0) = \infty$$

## DEL 2

**Oppgave 1** (10 poeng) Finn alle de komplekse fjerderøttene til $z = -16$.

Løsning: Det komplekse tallet $z = -16$ har polarkoordinater $r = 16$, $\theta = \pi$. Den første fjerderoten er dermed

$$w_0 = r^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\theta}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

Hver ny fjerderot fremkommer ved at vi ganger den foregående med $e^{i\frac{2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$. De neste røttene er dermed

$$w_1 = iw_0 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}, \quad w_2 = iw_1 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}, \quad w_3 = iw_2 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

(dette er det enda lettere å se geometrisk).

**Oppgave 2** Et bibliotek har tre filialer, $A$, $B$ og $C$. Du kan levere tilbake en bok i hvilken filial du vil uavhengig av hvor du har lånt den. Statistikken viser at av de bøkene som blir lånt i filial $A$, blir 70% returnert i filial $A$, 20% i filial $B$ og 10% i filial $C$. Av de bøkene som blir lånt i filial $B$, blir 30% returnert i filial $A$, 60% i filial $B$ og 10% i filial $C$. Av de bøkene som blir lånt i filial $C$, blir 20% returnert i filial $A$, 20% i filial $B$ og 60% i filial $C$.

a) (10 poeng) Finn en matrise $M$ slik at dersom $x$, $y$ og $z$ er antall bøker som lånes i filialene $A$, $B$ og $C$ i en lengre periode, og $\mathbf{r}$ er vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

så vil komponentene til vektoren $M\mathbf{r}$ fortelle oss hvor mange av disse bøkene som blir returnert i henholdsvis $A$, $B$ og $C$.

b) (10 poeng) Statistikken viser at 50% av utlånene skjer i filial $A$, 30% i filial $B$ og 20% i filial $C$. Hvor stor prosentdel av bøkene blir returnert i filialene $A$, $B$ og $C$?

Løsning: a) Antall bøker som blir returnert ved de tre filialene er:

$$A\colon 0.7x + 0.3y + 0.2z \quad B\colon 0.2x + 0.6y + 0.2z \quad C\colon 0.1x + 0.1y + 0.6z$$

Bruker vi matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

ser vi at

$$M\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7x + 0.3y + 0.2z \\ 0.2x + 0.6y + 0.2z \\ 0.1x + 0.1y + 0.6z \end{pmatrix}$$

som er det vi ønsker.

b) Returnerte bøker i prosent er gitt ved

$$M = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 30 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 \\ 32 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Det betyr at 48% av bøkene returneres i $A$, 32% $B$ og 20% i $C$.

**Oppgave 3**

a) (10 poeng) Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$ når $f(x) = (1+x)\arctan x$. Hvor er funksjonen konveks og hvor er den konkav?

b) (10 poeng) Regn ut integralet $I = \int \arctan \sqrt{x}\, dx$.

Løsning: a) Deriverer $f$ ved produktregelen:

$$f'(x) = \arctan x + \frac{1+x}{1+x^2}$$

Deriverer en gang til ved brøkregelen og setter deretter på felles brøkstrek:

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1 \cdot (1+x^2) - (1+x) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x)}{(1+x^2)^2}$$

Vi ser at $f''(x) \geq 0$ for $x \leq 1$ og $f''(x) \leq 0$ for $x \geq 1$. Det betyr at $f$ er konveks for $x \leq 1$ og konkav for $x \geq 1$.

b) Det er to naturlige fremgangsmåter, vi kan enten bruke delvis integrasjon eller substituere $u = \sqrt{x}$. De to metodene gir omtrent de samme regnestykkene, men i litt forskjellig rekkefølge. Jeg velger å substituere først, og setter altså $u = \sqrt{x}$. Da er $x = u^2$ og $dx = 2u\, du$, så vi får

$$I = \int \arctan \sqrt{x}\, dx = \int \arctan u\; 2u\, du = \int 2u \arctan u\, du$$

Vi bruker så delvis interegrasjon med $U = \arctan u$ og $V' = 2u$. Da er $U' = \frac{1}{1+u^2}$ og $V = u^2$, så vi får

$$I = u^2 \arctan u - \int \frac{u^2}{1+u^2}\, du$$

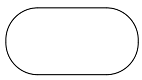
Integranden er en rasjonal funksjon der telleren har samme grad som nenveren. For å komme videre, kan vi polynomdividere, men det er lettere å bare addere og subtrahere 1 i telleren:

$$\int \frac{u^2}{1+u^2}\, du = \int \frac{u^2+1}{1+u^2}\, du - \int \frac{1}{1+u^2}\, du = u - \arctan u + C$$

Dermed har vi

$$I = u^2 \arctan u - u + \arctan u + C = (x+1) \arctan \sqrt{x} - \sqrt{x} + C$$

**Oppgave 4** (10 poeng) En speilprodusent planlegger å starte produksjonen av en ny serie. De nye speilene skal ha et areal på $1\text{m}^2$ og være formet som et rektangel med en halvsirkel i høyre og venstre ende (se figur). Rundt hele speilet skal det være en ramme, og den krumme delen av rammen er dobbelt så dyr per centimeter som den rette delen. Hvor stor må radius i halvsirklene være for at rammen skal bli så billig som mulig?



Et speil

Løsning: Dersom $r$ er radien i halvsirklene, er høyden til rektanglet $2r$. Kaller vi bredden til rektanglet $b$, og lar $p$ være prisen per meter for den *rette* delen av rammen, så er den totale rammeprisen

$$P = (2p)(2\pi r) + 2pb = 4\pi pr + 2pb$$

For å eliminerer den ene variabelen bruker vi at arealet til speilet er gitt ved

$$1 = 2rb + \pi r^2$$

Dette gir $b = \frac{1-\pi r^2}{2r} = \frac{1}{2r} - \frac{\pi}{2}r$. Setter vi dette inn i uttrykket for $P$, ser vi at

$$P = 4\pi pr + 2p(\frac{1}{2r} - \frac{\pi}{2}r) = 3\pi pr + \frac{p}{r}$$

Deriverer vi $P$ med hensyn på $r$, får vi

$$P' = 3\pi p - \frac{p}{r^2}$$

Setter vi dette uttrykket lik 0 og løser, får vi $r = \frac{1}{\sqrt{3\pi}} = \frac{\sqrt{3\pi}}{3\pi}$. Ved å sjekke fortegnet til den deriverte er det lett å se at dette er et minimumspunkt.

**Oppgave 5** (10 poeng) En mengde $A \subset \mathbb{R}$ kalles *åpen* dersom det for hver $a \in A$ finnes en $\delta > 0$ slik at $(a - \delta, a + \delta) \subset A$. Vis at intervallet $(0, 1]$ *ikke* er en åpen mengde. Vis også at dersom $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon, så er mengden

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$$

åpen.

Løsning: Vi ser først på intervallet $(0, 1]$. Enhver mengde av formen $(1-\delta, 1+\delta)$ inneholder tall som er større enn 1, og som er derfor ikke er med i $A$. Definisjonen av åpen mengde er derfor ikke oppfylt når vi setter $a = 1$.

Anta så at $f$ er en kontinuerlig funksjon, og at $a \in A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}$. Vi må vise at det finnes en $\delta > 0$ slik at alle $x \in (a - \delta, a + \delta)$ er med i $A$. Velger vi $\epsilon = |f(a)|$, finnes det per definisjon av kontinuitet en $\delta > 0$ slik at hvis $|x - a| < \delta$, så er $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Hvis $x \in (a - \delta, a + \delta)$, er da $f(x) \neq 0$, og følgelig er $x \in A$. (Hvis du ikke ser hvorfor $f(x) \neq 0$, så observer at hvis $f(x)$ var lik 0, så ville $|f(x) - f(a)| = |0 - f(x)| = |f(x)| = \epsilon$, og det er umulig siden $|f(x) - f(a)| < \epsilon$ per definisjon av $\delta$).

SLUTT