Løsningsforslag MAT1100 10/12-2008

DEL 1

I del I gir vi her også en begrunnelse for det riktige svar-alternativet (som selvfølgelig ikke forlanges til eksamen i denne flervalgsdelen).

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ til $f(x,y) = \arcsin(xy)$?

☐ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

☐ $\frac{1}{\sqrt{1-xy^2}}$

☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

☐ $\frac{x}{\sqrt{1-xy^2}}$

☐ $\frac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}$

Svar c) : $\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$. Begrunnelse deriver m.h.p y og bruk kjerneregel.

2. (3 poeng) I hvilken retning vokser funksjonen $f(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}yz^2$ raskest i punktet $(1,2,1)$?

☐ $(1,2,1)$

☐ $(2,1,2)$

☐ $(1,1,1)$

☐ $(2,-1,2)$

☐ $(1,-2,1)$

Svar b) : $(2,1,2)$. f vokser raskest i retning av gradienten i punktet, og vi har $\nabla f(x,y,z) = (xy, \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}z^2, yz)$. $\nabla f(1,2,1) = (2,1,2)$.

3. (3 poeng) Hvis $\boldsymbol{a} = (2,-1,1)$ og $\boldsymbol{b} = (-1,1,1)$ så er $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ lik:

☐ $(2,3,-3)$

☐ $(2,3,-1)$

☐ $(-2,-3,1)$

☐ $\frac{1}{\sqrt{14}}(-2,-3,1)$

☐ $\frac{1}{\sqrt{14}}(2,3,-1)$

Svar c) : $(-2,-3,1)$. Vi har $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = (-2,-3,1)$.

4. (3 poeng) Hva er den dobbelt deriverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ til $f(x,y) = \ln(1 + x^2y^2)$

☐ $\frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}$

☐ $\frac{4x^2y}{(1+x^2y^2)^2}$

☐ $\frac{4xy^2}{(1+x^2y^2)^2}$
☐ $\frac{4xy}{1+x^2y^2}$
☐ $\frac{4xy+4x^3y^3}{(1+x^2y^2)^2}$

Svar a) $\frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}$. Vi har $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x^2y}{1+x^2y^2}$ og derfor $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4xy(1+x^2y^2)-2x^2y2xy^2}{(1+x^2y^2)^2} = \frac{4xy}{(1+x^2y^2)^2}$.

5. (3 poeng) Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $(2,1)$ og $(1,-4)$ er:
☐ $\frac{9}{2}$
☐ -9
☐ 11
☐ 9
☐ 0

Svar d) 9. Arealet blir: $|\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}| = |-9| = 9$.

6. (3 poeng) Når vi substituerer $u = \arcsin x$ i integralet $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x \, dx$ får vi:
☐ $\int u \, du$
☐ $\int \cos^2 u \, du$
☐ $\int u \cos^2 u \, du$
☐ $\int \sin^2 u \, du$
☐ $\int u \sin^2 u \, du$

Svar c) $\int u \cos^2 u du$. Vi har $x = \sin u$, $dx = \cos u \, du$, $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 u} = \cos u$, som tilsammen gir $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \int u \cos^2 u \, du$.

7. (3 poeng) Bruker vi delvis integrasjon på integralet $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$ får vi:
☐ $-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx$
☐ $\frac{x^3}{3\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} \int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$
☐ $\frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$
☐ $x^2 \arctan x - 2 \int x \arctan x dx$
☐ $x^2 \ln(\sqrt{1-x^2}) - 2 \int x \ln(\sqrt{1-x^2}) dx$

Svar a) $-x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx$. Setter vi $u = x$, $v' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $v = -\sqrt{1-x^2}$, har vi $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int uv' dx = uv - \int u'v dx = -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2} dx$.

8. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene $(1,1,2)$, $(1,-1,0)$, $(2,0,1)$ er:

☐ 4
☐ 8
☐ 2
☐ -4
☐ 0

Svar c) 2. Volumet er lik :$\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}\right| = |-1-1+4| = 2.$

9 (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ har verdi:

☐ 0
☐ 2
☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ π
☐ 2π

Svar d) π. Vi har $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to -1^+} \int_{b}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{a\to 1^-} \int_{0}^{a} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{b\to -1^+} -\arcsin b + \lim_{a\to 1^-} \arcsin a = -\arcsin(-1) + \arcsin 1 = -(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} = \pi.$

10. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -1 \\ \frac{1}{5} & 2 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Svar b) $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Vi har $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4+1 & 2-2 \\ 2-2 & 1+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dette viser at A^{-1} er matrisen oppgitt i svaralternativ b).

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn konstanter A, B og C slik at

$$\frac{2x^2+10x+13}{(x+1)(x^2+6x+10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+10}.$$

Vi må ha

$2x^3+10x+13 = A(x^2+6x+10)+(Bx+C)(x+1) = (A+B)x^2+(6A+B+C)x+10A+C.$

Så (A, B, C) er løsningen til likningssystemet $A+B = 2, 6A+B+C = 10, 10A+C = 13$. Trekker vi første likning fra den andre får vi $5A+C = 8$. Trekker vi dette fra siste likning får vi $5A = 5$, $A = 1$ som gir $B = 1$ og $C = 8-5 = 3$.

b) (10 poeng) Finn arealet under kurven $y = \frac{2x^2+10x+13}{(x+1)(x^2+6x+10)}$, over x-aksen og begrenset av linjene $x = 0$ og $x = 1$.

Arealet A er gitt ved

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \frac{2x^2+10x+13}{(x+1)(x^2+6x+10)}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{x+3}{x^2+6x+10}dx \\ &= [\ln|x+1|]_0^1 + \frac{1}{2}[\ln(x^2+6x+10)]_0^1 = \ln 2 + \frac{1}{2}\ln 17 - \frac{1}{2}\ln 10 = \frac{1}{2}\ln\frac{34}{5}. \end{aligned}$$

c) (10 poeng) La $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^{\frac{1}{4}}}$. Finn volumet av det omdreiningslegemet vi får når grafen $y = f(x)$, $x \in [0, 1]$ dreies om x-aksen.

Volumet V av omdreiningslegemet er gitt ved:

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 dx = \pi \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \pi[\sqrt{1+x^2}]_0^1 = \pi(\sqrt{2}-1).$$

Oppgave 2 La $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Vis at $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Finn en 3×3 matrise B slik at $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Vi har

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1+1 & \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Vi vet da at vi også må ha $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = I_3$. Så $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$. Sett $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Hvis $AB = C$ så er $B = A^{-1}AB = A^{-1}C$. Dvs.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3 La $f(x) = \arctan x + \ln(1 + x^2)$.

a) (10 poeng) Regn ut $f'(x)$ og $f''(x)$. Finn hvor $f(x)$ er konveks og hvor $f(x)$ er konkav?

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+2x}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x(1+2x)}{(1+x^2)^2} = -2\frac{x^2+x-1}{(1+x^2)^2}.$$

Vi har $x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Vi ser da at $f''(x) < 0$ når $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Så f er konkav på $(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}]$. $f'(x) > 0$ når $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ så f er konveks på $[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}]$. Videre er også $f''(x) < 0$ når $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Så f er konkav på $[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty)$.

b) (10 poeng) Vis at $f(x)$ har nøyaktig 2 nullpunkter.

Av utrykket for $f'(x)$ i a) fremgår at $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ og vi får at $f(x)$ er strengt avtagende i $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ og strengt voksende i $[-\frac{1}{2}, \infty)$. f kan da ha høyst et nullpunkt i $[-\frac{1}{2}, \infty)$, og siden $f(0) = \arctan 0 + \ln 1 = 0$ har f nøyaktig ett nullpunkt i dette intervallet (nemlig for $x = 0$). Vi har da at $f(-\frac{1}{2}) < f(0) = 0$. Når $x \to -\infty$, vil $(1 + x^2) \to \infty$ og $\ln(1 + x^2) \to \infty$. Videre vil $\arctan x \to -\frac{\pi}{2}$ når $x \to -\infty$. Tilsammen får vi at $f(x) \to \infty$ når $x \to -\infty$. Siden f er kontinuerlig følger fra skjæringssetningen at $f(x)$ må ha nullpunkter i $(-\infty, -\frac{1}{2})$, men siden f er strengt avtagende i dette intervallet har det bare ett nullpunkt her. Tilsammen får vi da nøyaktig to nullpunkter i hele $\mathbb{R}$.

Oppgave 4 (10 poeng) Hva er det største volumet en sylinder kan ha om det er innskrevet i en regulær, sirkulær kjegle med radius 10 cm og høyde 20 cm.

Lar vi sylinderen ha høyde h og radius r må vi ha $h = 2(10 - r)$(se tegning nedenfor). Volumet av sylinderen blir da $V(r) = 2\pi r^2(10 - r)$. Her vil $r \in \ [0, 10]$. $V(r)$ er en kontinuerlig funksjon på det lukkete begrensete intervallet $[0, 10]$ og må da ha minst et absolutt maksimums punkt. Siden $V(0) = V(10) = 0$ må et maks.punkt være et indre punkt i intervallet og derfor et indre punkt der $V'(r) = 0$. Vi har $V'(r) = 4\pi r(10 - r) - 2\pi r^2 = 2\pi r(20-3r)$. Så vi må ha $r = \frac{20}{3}$. Dette gir oss volumet $V(\frac{20}{3}) = \frac{8000}{27}\pi(\mathrm{cm}^3)$.

$\tan\alpha = \frac{20}{10} = \frac{h}{10-r} \Rightarrow h = 2(10 - r)$.