UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 2010.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen innholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt, eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hver av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunnne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Del 1

Oppgave 1. (3 poeng). Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ til funksjonen

$$f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \text{ er}$$

A $1/(1 + x^2 + y^2)$
✓**B** $2y/(1 + x^2 + y^2)$
C $2y/(1 + x^2 + y^2)^2$
D $2y \ln(1 + x^2 + y^2)$
E $1/(1 + 2y)$

Oppgave 2. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z,$$

vokser i punktet $(1, -1, 0)$ raskest i retningen

A $(1, 2, 0)$
B $(2, 2, -2)$
C $(-2, 2, -2)$
✓**D** $(1, -1, -1)$
E $(0, 0, 1)$

Oppgave 3. (3 poeng). Den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ til funksjonen $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ når $\mathbf{a} = (\sqrt{\pi}/2, \sqrt{\pi}/2)$ og $\mathbf{r} = (\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ er

A 0
B $-\pi$
C $-\sqrt{\pi}$
D -2
✓**E** -2π

Oppgave 4. (3 poeng). Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $(2, -3)$ og $(1, 2)$ er

A 1
B 3
C 5
✓**D** 7
E 9

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. (3 poeng). Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ er}$$

A $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

B $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

C $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

✓**D** $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

E $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. (3 poeng). Integralet

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \quad \text{er}$$

✓**A** 1/3

B 1/2

C 2/3

D 1

E 3/2

Oppgave 7. (3 poeng). Den deriverte til funksjonen (definert for $x > 1$)

$$f(x) = \int_{\ln(x)}^{x} t\sin(t)\,dt \quad \text{er}$$

A 0

B $x\sin(x) - \ln(x)\sin(\ln(x))$

C $x\sin(x) + \ln(x)\cos(\ln(x))/x$

✓**D** $x\sin(x) - \ln(x)\sin(\ln(x))/x$

E Funksjonen er ikke deriverbar

Oppgave 8. (3 poeng). Volumet til parallellepipedet uspent av vektorene $(1, 1, 1)$, $(1, 1, -1)$ og $(0, 2, 0)$ er

A 5

✓**B** 4

C 3

D 2

E 1

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 9. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt, \;\; x \geq 0,$$

A er konveks

✓**B** har lokale maksimum i $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

C har lokale minimum i $x = (2n+1)\pi$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

D har vendepunkt i $x = n\pi$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

E er voksende

Oppgave 10. (3 poeng). Følgen gitt ved $a_0 = 0$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{for } n \geq 0\text{, er konvergent.}$$

Da blir grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A 0

✓**B** $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

C $\frac{1}{2}(-\sqrt{5}-1)$

D $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E $e/2$

Del 2

Oppgave 11.

a) (10 poeng). Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \ln(1+x^2)\,dx.$$

Løsningsforslag: Vi bruker delvisintegrasjon

$$\begin{aligned}\int \ln(1+x^2)\,dx &= x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2\int 1 - \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x) + C.\end{aligned}$$

b) (10 poeng). Regn ut det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx.$$

(Fortsettes på side 5.)

Løsningsforslag: Vi bruker delvisintegrasjon igjen,

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^\infty \sin(x)e^{-x}\,dx &= -e^{-x}\sin(x)\,\Big|_{x=0}^{x=\infty} + \int_0^\infty \cos(x)e^{-x}\,dx \\
&= -\cos(x)e^{-x}\,\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \sin(x)e^{-x} \\
&= 1 - I.
\end{aligned}
$$

Derfor blir $I = 1/2$.

Oppgave 12. (10 poeng). Skissér området i det komplekse planet gitt ved at $\mathrm{Re}(iz) \geq |z|^2$.

Løsningsforslag: Sett $z = x + iy$, vi får at

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Re}(iz) = -y \geq |z|^2 = x^2 + y^2 \\
0 > x^2 + y^2 + y = x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\
\Downarrow \\
x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Altså blir området en sirkel (disk) med senter $-i/2$ og radius $1/2$.

Oppgave 13. (10 poeng). Sett

$$
f(x) = \frac{1}{2}x\,|x|\,, \quad x \in \mathbb{R}.
$$

Hvor er f deriverbar? Hvor er f konveks og hvor er f konkav?

Løsningsforslag: Vi får at

$$
f'(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x & x < 0. \end{cases}
$$

For $x = 0$ blir

$$
f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2} \frac{h\,|h|}{h} = 0.
$$

Derfor er f deriverbar overalt. Videre blir

$$
f''(x) = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}
$$

Derfor er f konkav for $x \leq 0$ og konveks for $x \geq 0$.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 14. (10 poeng). Sett

$$L_n = \lim_{x \to 0^+} x\,(\ln(x))^n\,, \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Finn L_0, og vis rekursjonsformelen $L_n = -nL_{n-1}$. Bruk dette til å finne L_n.

Løsningsforslag: $L_0 = \lim_{x \to 0^+} x = 0$. Ved L'Hopital får vi at

$$L_n = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln(x))^n}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{n(\ln(x))^{n-1}\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = -n \lim_{x \to 0^+} x(\ln(x))^{n-1} = -nL_{n-1}.$$

Siden $L_0 = 0$, blir $L_n = 0$ for alle $n > 0$.

Oppgave 15. La A være 3×3 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (10 poeng). Regn ut A^2, A^3 og A^4.

Løsningsforslag: Vi får at

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) (10 poeng). Finn en formel for A^n, og bevis denne formelen ved induksjon.

Løsningsforslag: Jeg gjetter på at

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & (1 + 2 + \cdots + n) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 7.)

som i hvert fall stemmer for $n = 1, 2, 3$ og 4. Da blir

$$
\begin{aligned}
A^{n+1} = A^n A &= \begin{pmatrix} 1 & n & (1+\cdots+n) \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1+n & 1+n+(1+\cdots+n) \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & n+1 & \sum_{i=1}^{n+1} i \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Dermed blir formelen riktig.

SLUTT