UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus.
Eksamensdag:	Fredag 9. desember 2011.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Svarark, formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Løsningsforslag

DEL 1

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x, y) = xy^3 + y^2$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $y^3 + 3xy^2 + 2y$
B) y^3
C) $3xy^2 + 2y$
D) $y^3 + y^2$
E) y^2

Riktig svar: C. Begrunnelse: Vi deriverer mhp. y som om x er en konstant:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 + 2y$$

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis $f(x, y) = x^3y^2$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a}; \mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1, -1)$ og $\mathbf{r} = (1, 2)$, lik:

A) -7
B) 8
C) $-\frac{1}{2}$
D) -1
E) 12

Riktig svar: D. Begrunnelse: De partiellderiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y,$$

så

$$\nabla f(1, -1) = (3 \cdot 1^2 \cdot (-1)^2, 2 \cdot 1^3 \cdot (-1)) = (3, -2)$$

(Fortsettes på side 2.)

Siden funksjonen åpenbart er deriverbar, blir da

$$f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f((a)) \cdot \mathbf{r} = (3,-2)\cdot(1,2) = 3-4 = -1$$

Oppgave 3. (3 poeng) I punktet $(1,-1)$ vokser funksjonen $f(x,y) = xe^{xy^2}$ raskest i retningen:

A) $(1,-3)$
B) $(3,1)$
C) $(-4,1)$
D) $(1,-1)$
E) $(-1,-3)$

Riktig svar: D. Begrunnelse: De partiellderiverte er

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy^2} + xy^2e^{xy^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2ye^{xy^2},$$

så

$$\nabla f(1,-1) = (2e,-2e) = 2e(1,-1)$$

Funksjonen stiger hurtigst i den retningen gradienten peker, altså $(1,-1)$.

Oppgave 4. (3 poeng) Hvis en trekant har hjørner i punktene $(1,0,-2)$, $(2,-1,-2)$, $(1,-3,1)$, så er arealet:

A) 6
B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
C) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$
D) 4
E) $\frac{3}{2}$

Riktig svar: C. Begrunnelse: Trekanten er utspent av vektorene $\mathbf{a} = (2,-1,-2)-(1,0,-2) = (1,-1,0)$ og $\mathbf{b} = (1,-3,1)-(1,0,-2) = (0,-3,3)$. Arealet er gitt ved $\frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$, og siden

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 3\mathbf{k},$$

får vi

$$\text{areal} = \frac{1}{2}|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+(-3)^3+(-3)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{27} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

Oppgave 5. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3-1}{(x^2+1)(x-2)^2}$, må du først:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-2)^2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-2)^2}$
C) polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{(x-2)} + \frac{D}{(x-2)^2}$

(Fortsettes på side 3.)

E) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x^2+1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{Cx+D}{(x-2)^2}$

Riktig svar: D. Begrunnelse: Følger direkte fra reglene for delbrøksoppspalting.

Oppgave 6. (3 poeng) Dersom du substituerer $u = \arcsin x$ i integralet $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \ln(\arcsin x)\, dx$, får du

A) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \ln(u) \cos u\, du$
B) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(u)}{\sqrt{1-u^2}}\, du$
C) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\ln(u)}{1+u^2}\, du$
D) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \ln(u) \cos u\, du$
E) $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\ln(u)}{\sqrt{1-u^2}}\, du$

Riktig svar: D. Begrunnelse: Hvis $u = \arcsin x$, er $x = \sin u$, og følgelig er $dx = \cos u\, du$. Vi må også skifte grenser: Når $x = \frac{1}{2}$, er $u = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, og når $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, er $u = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$. Dermed er

$$\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \ln(\arcsin x)\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \ln(u) \cos u\, du$$

Oppgave 7. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, dreies en omdreining om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er

A) $\pi^2 - 2\pi$
B) π
C) $\frac{\pi^2}{4}$
D) $\frac{\pi^2}{3}$
E) $\pi + \frac{1}{2}$

Riktig svar: A. Begrunnelse: Volumet er gitt ved

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x f(x)\, dx) = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx$$

Bruker vi delvis integrasjon med $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$, får vi

$$\int_0^{\pi/2} x \cos x\, dx = \Big[x \sin x\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Ganger vi dette uttrykket med 2π, får vi alternativ A).

Oppgave 8. (3 poeng) Integralet $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x+1}\, dx$:

A) er lik 8π
B) er lik $10 \ln 2$
C) er lik 12π
D) er lik $\frac{5\pi}{4} \ln 2$

(Fortsettes på side 4.)

E) divergerer

<u>Riktig svar:</u> E. <u>Begrunnelse:</u> Bruker vi at $\arctan x \geq \frac{\pi}{4}$ når $x \geq 1$, får vi

$$\int_0^b \frac{\arctan x}{x+1}\,dx > \int_1^b \frac{\frac{\pi}{4}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{4}\Big(\ln(b+1) - \ln 2\Big) \to \infty$$

når $b \to \infty$.

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx$:

A) divergerer
B) er lik $\frac{\pi}{4}$
C) er lik $\ln 2$
D) er lik $\sqrt{3}$
E) er lik $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Riktig svar:</u> B. <u>Begrunnelse:</u> Vi har

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2+2x+2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx = \lim_{b\to\infty}\Big[\arctan(x+1)\Big]_0^b =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \arctan(b+1) - \arctan 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Oppgave 10. (3 poeng) Buelengden av funksjonen $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ fra $x = -1$ til $x = 1$ er:

A) π
B) 4
C) $2\sqrt{3}$
D) $2\pi - 3$
E) $\frac{\pi^2}{3}$

<u>Riktig svar:</u> A. <u>Begrunnelse:</u> Grafen er en halvsirkel med radius $r = 1$, og lengden er dermed $L = \frac{1}{2}2\pi r = \pi$.

Buelengden kan også finnes ved hjelp av buelengdeformelen. Siden

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

er

$$L = \int_{-1}^1 \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}\,dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx =$$

$$= \Big[\arcsin x\Big]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi$$

(Fortsettes på side 5.)

DEL 2

Oppgave 11 (10 poeng) Løs integralet

$$\int \frac{x^2}{x^2+2x+2}\,dx$$

Løsning: Vi må først redusere graden til telleren. Det kan enten gjøres ved polynomdivisjon, eller ved å observere at

$$\frac{x^2}{x^2+2x+2} = \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = 1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$

Dermed er integralet vårt lik

$$I = \int \left(1 - \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\right) dx = x - \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$$

Innfører vi $u = x^2+2x+2$, ser vi at $du = 2x+2$. Dermed er

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + C = \ln(x^2+2x+2) + C,$$

og vi får

$$I = x - \ln(x^2+2x+2) + C$$

Oppgave 12. Den brukte kartongen fra tre kartongfabrikker 1, 2 og 3 samles inn ved to gjenvinningsanlegg A og B og sendes tilbake til fabrikkene uavhengig av hvor den opprinnelig ble produsert. Vi har følgende opplysninger:

(i) Av kartongen fra fabrikk 1 blir 40% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 30% ved anlegg B og resten går tapt.

(ii) Av kartongen fra fabrikk 2 blir 30% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 50% ved anlegg B og resten går tapt.

(iii) Av kartongen fra fabrikk 3 blir 60% samlet inn ved gjenvinningsanlegg A, 30% ved anlegg B og resten går tapt.

(iv) Av kartongen som samles inn ved gjennvinningsanlegg A, sendes 40% tilbake til fabrikk 1, 20% til fabrikk 2 og 40% til fabrikk 3.

(v) Av kartongen som samles inn ved gjennvinningsanlegg B, sendes 20% tilbake til fabrikk 1, 50% til fabrikk 2 og 30% til fabrikk 3.

I oppgaven er C og D to matriser med følgende egenskaper: Dersom fabrikkene 1, 2 og 3 produserer henholdsvis x_1, x_2 og x_3 tonn kartong, så er antall tonn y_1 og y_2 som samles inn ved stasjonene A og B, gitt ved

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

(Fortsettes på side 6.)

Dersom y_1 og y_2 er antall tonn kartong som samles inn ved stasjonene A og B, så er antall tonn z_1, z_2 og z_3 som sendes tilbake til fabrikkene 1, 2 og 3 gitt ved

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Finn C og D og regn ut DC.

b) (10 poeng) Anta at fabrikkene 1, 2 og 3 i en periode produserer henholdsvis 3000 tonn, 4000 tonn og 3000 tonn kartong. Hvor mye av denne produksjonen returneres til hver av fabrikkene?

Løsning: a) Matrisene er

$$C = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.5 \\ 0.4 & 0.3 \end{pmatrix}$$

For å se at dette er riktig, gang matrisene med generelle vektorer $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ og se at vi får fordelingene som oppgaven tilsier.

Produktet blir

$$E = DC = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix}$$

b) Fordelingen er gitt ved $E\mathbf{x}$ (husk begrunnelsen for definisjonen av matrisemultiplikasjon), altså

$$\begin{pmatrix} 0.22 & 0.22 & 0.3 \\ 0.23 & 0.31 & 0.27 \\ 0.25 & 0.27 & 0.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3000 \\ 4000 \\ 3000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2440 \\ 2740 \\ 2820 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at fabrikk 1 mottar 2440 tonn returkartong, mens fabrikk 2 og 3 mottar henholdsvis 2740 og 2820 tonn.

Oppgave 13. I denne oppgaven er $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{for } x \neq 1 \\ 1 & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

a) (10 poeng) Vis at f er kontinuerlig.

b) (10 poeng) Finn den deriverte til f for $x \neq 1$. Vis at f er deriverbar i $x = 1$ og finn $f'(1)$.

I resten av oppgaven er $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ funksjonen definert ved

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

der f er som ovenfor.

(Fortsettes på side 7.)

c) (10 poeng) Finn $F'(x)$ og vis at F er strengt voksende.

d) (10 poeng) Finn $F''(x)$ og vis at F er konkav.

Løsning: a) Funksjonen f er en brøk to kontinuerlige funksjoner $\ln x$ og $x-1$, og så lenge nevneren $x-1$ er ulik null, er funksjonen kontinuerlig. Dette viser at f er kontinuerlig når $x \neq 1$. Det gjenstår å vise at f er kontinuerlig i 1, dvs. å vise at $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Vi har

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 = f(1)$$

som viser at f også er kontinuerlig i 1.

b) For $x \neq 1$ bruker vi brøkregelen for derivasjon:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \ln x}{(x-1)^2}$$

For $x = 1$ bruker vi definisjonen av den deriverte;

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1)^2} \overset{L'H}{=}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{2(x-1)} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = -\frac{1}{2}$$

Siden grenseverdien eksisterer, er f deriverbar i $x = 1$, og $f'(1) = -\frac{1}{2}$.

c) Ved analysens fundamentalteorem er $F'(x) = f(x)$. Vi ser at fortegnet til f er positivt overalt (for $x < 1$ er både $\ln x$ og $x - 1$ negative, mens de for $x > 1$ begge er positive), og dermed er F strengt voksende.

d) Siden $F'(x) = f(x)$, er $F''(x) = f'(x)$, dvs.

$$F''(x) = \begin{cases} \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln x}{(x-1)^2} & \text{for } x \neq 1 \\ \\ -\frac{1}{2} & \text{for } x = 1 \end{cases}$$

For å vise at F er konkav, må vi vise $F''(x) \leq 0$ for alle x. Siden $(x-1)^2 \geq 0$, holder det å vise at telleren er negativ, altså at $\ln x \geq \frac{1}{x}(x-1)$. Bruker vi middelverdisetningen på funksjonen $g(x) = \ln x$ over intervallet mellom 1 og x, får vi at det finnes en c mellom 1 og x slik at

$$\frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(c)$$

dvs. slik at

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c}$$

Vi ser på tilfellene $x > 1$ og $x < 1$ hver for seg (i $x = 1$ vet vi allerede at F'' er negativ):

(Fortsettes på side 8.)

For $x > 1$, er $1 < c < x$ og følgelig

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c} > \frac{1}{x}$$

Ganger vi med den positive størrelsen $x-1$, får vi $\ln x > \frac{1}{x}(x-1)$ som er det vi skulle vise.

For $x < 1$, er $x < c < 1$ og følgelig

$$\frac{\ln x}{x-1} = \frac{1}{c} < \frac{1}{x}$$

Ganger vi med den negative størrelsen $x-1$, må vi snu ulikheten og får $\ln x > \frac{1}{x}(x-1)$ som igjen er akkurat det vi skulle vise.

Dermed har vi vist at $F''(x)$ er negativ for alle $x \in (0, \infty)$ og følgelig er funksjonen konkav.