Løsningsforslag eksamen Mat 1100 12. des. 2013

Oppgave 1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+(xy+1)^2} \cdot y$$

$\boxed{D}$

Oppgave 2

$f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ gir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2(x-1), 2y\right) \overset{(1,1)}{=} (0, 2)$$

Så $f'(\vec{a};\vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = (0,2) \cdot (1,0) = 0 + 0 = 0$.

$\boxed{B}$

Oppgave 3

$$\cos v = \frac{(-1,2,-2,4)\cdot(2,-2,2,-2)}{\sqrt{1+4+4+16} \cdot \sqrt{4+4+4+4}}$$

$$= \frac{-2-4-4-8}{5 \cdot 4} = \frac{-18}{20} = \frac{-9}{10}$$

$\boxed{E}$

Oppgave 4

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot 5 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 10$$

$\boxed{E}$

Oppgave 5

$$1 + \cot^2 x = 1 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$\boxed{A}$

Oppgave 6

$$\int \arccos x \, dx = \int u(-\sin u)\, du = -\int u \sin u \, du$$

$u = \arccos x$ gir $x = \cos u$

$\frac{dx}{du} = -\sin u$, $dx = -\sin u \, du$

$\boxed{C}$

Oppgave 7

$$V = \int_0^{\sqrt{\pi}} 2\pi x \sin(x^2)\, dx = \int_0^{\pi} \pi \cdot \sin u \, du$$

$u = x^2$ gir $\frac{du}{dx} = 2x$

$du = 2x\, dx$ $dx = \frac{1}{2x} du$

$x = 0$ gir $u = 0$

$x = \sqrt{\pi}$ gir $u = \pi$

$$= \pi \cdot \Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \pi \cdot \Big[-\cos \pi + \cos 0\Big] = 2\pi$$

$\boxed{B}$

Oppgave 8

$$M^2 = \begin{array}{cc|cc} & & 0 & 1 \\ & & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \quad , \quad \text{så} \quad M^4 = \begin{array}{cc|cc} & & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Ergo} \quad M^8 = M^4 \cdot M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{E}$

Oppgave 9

$$\int_0^a \frac{1+x}{x^{1/3}}\,dx = \int_0^a \left(x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{-\frac{1}{3}+1} x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{5}{3}} \right]_0^a$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}} a^{2/3} + \frac{1}{\frac{5}{3}} a^{5/3} = \frac{3}{2} a^{2/3} + \frac{3}{5} a^{5/3}$$

$\boxed{C}$

Oppgave 10

For $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ har vi

$$\int_t^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^n x}\,dx = \int_{\sin t}^{1} \frac{1}{u^n}\,du = \int_{\sin t}^{1} u^{-n}\,du$$

$u = \sin x$ gir $\frac{du}{dx} = \cos x$

$du = \cos x\,dx$ $\quad dx = \frac{1}{\cos x}\,du$

$x = t$ gir $u = \sin t$

$x = \frac{\pi}{2}$ gir $u = 1$

$$= \frac{1}{-n+1}\left[u^{-n+1}\right]_{\sin t}^{1}$$

$$= \frac{1}{1-n}\left[\frac{1}{u^{n-1}}\right]_{\sin t}^{1}$$

$$= \frac{1}{1-n}\left[1 - \frac{1}{(\sin t)^{n-1}}\right] \xrightarrow{\boxed{t \to 0^+}} \begin{cases} +\infty & \text{for } n > 1 \\ \frac{1}{1-n} & \text{for } n < 1 \end{cases}$$

Sjekker tilfellet $n = 1$ separat:

$$\int_{\sin t}^{1} \frac{1}{u}\,du = \left[\ln u\right]_{\sin t}^{1} = \ln 1 - \ln(\sin t) \to +\infty$$

når $t \to 0^+$.

Ergo konvergerer integralet for $n < 1$ og divergerer for $n \geq 1$.

(Kunne alternativt brukt kjent resultat om $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$)

$\boxed{C}$

Oppgave 11

a) $u = z^2$ gir $P = u^2 - 8u - 9$

$u^2 - 8u - 9 = 0$ gir $u = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{100}}{2}$

$$= \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{cases} 9 \\ -1 \end{cases}$$

Ergo $P = (u+1)(u-9)$, dvs. $P(z) = (z^2+1)(z^2-9)$

Her er $z^2 - 9 = (z+3)(z-3)$, og

$z^2 + 1 = 0$ gir $z^2 = -1$, dvs. $z = \pm i$.

Altså $z^2 + 1 = (z+i)\cdot(z-i)$.

Kompleks faktorisering: $\underline{\underline{P(z) = (z+i)(z-i)(z+3)(z-3)}}$

Reell faktorisering: $\underline{\underline{P(z) = (z^2+1)(z+3)(z-3)}}$

b) $$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & a \\ a & 0 & 8 \\ 9 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ a^2 & 0 \end{vmatrix} + \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} a & 8 \\ 9 & 0 \end{vmatrix} + a \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 9 & a^2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-8a^2) + \frac{1}{8} \cdot (-72) + a^4$$

$$= \underline{\underline{a^4 - 8a^2 - 9}}$$

c) Vi vet at volumet av parallellepipedet er absoluttverdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & a \\ a & 0 & 8 \\ 9 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ved b) er dette absoluttverdien av

$$a^4 - 8a^2 - 9 \overset{a)}{=} (a^2+1)(a+3)(a-3)$$

Dette uttrykket er 0 for $a = 3$, og denne verdien er den eneste a-verdien i intervallet $[0, \infty)$ som gjør uttrykket lik 0. Ergo:

Volumet av parallellepipedet blir minst når $a = 3$

(volumet er da 0)

Oppgave 12

a) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

Ergo er f kontinuerlig i $x = 0$.

b) Fordi D_f er begrenset, kan ikke f ha horisontale eller skrå asymptoter.

Siden f er kontinuerlig og D_f er et åpent, begrenset intervall, er de eneste punktene der f kan ha vertikale asymptoter endepunktene $x = \pm\pi$. Sjekker disse:

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} \frac{\overset{\to \arctan \pi}{\arctan x}}{\underset{\to 0^+}{\sin x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\pi^+} f(x) = \lim_{x \to -\pi^+} \frac{\overset{\to \arctan(-\pi)}{\arctan x}}{\underset{\to 0^-}{\sin x}} = +\infty$$

Ergo: f har vertikale asymptoter $x = -\pi$, $x = \pi$

c) $$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x - \sin x}{x \sin x} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \cos x}{\sin x + x\cos x}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-1 \cdot 2x}{(1+x^2)^2} + \sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2} = 0$$

ved to gangers bruk av l'Hopitals regel.

d)
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\arctan h}{\sin h} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\arctan h - \sin h}{h \sin h} \overset{c)}{=} \underline{\underline{0}}$$

Altså er f deriverbar i $x = 0$, og $f'(0) = 0$.