Eksamen i MAT1100 H14: Løsningsforslag

Oppgave 1. (3 poeng) Dersom $f(x,y) = x\sin(xy^2)$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $\sin(xy^2) + xy^2\cos(xy^2)$
B) $x\cos(xy^2)$
C) $2x^2y\cos(xy^2)$
D) $\sin(xy^2) + 2x^2y^2\cos(xy^2)$
E) $\cos(xy^2)$

Riktig svar: C): $2x^2y\cos(xy^2)$.
Begrunnelse: Kjerneregelen: $\frac{\partial}{\partial y}x\sin(xy^2) = x\cos(xy^2)\cdot 2xy = 2x^2y\cos(xy^2)$

Oppgave 2. (3 poeng) Dersom $f(x,y) = xe^{xy}$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ der $\mathbf{a} = (1,1)$ og $\mathbf{r} = (-2,1)$, lik:

A) e
B) $7e$
C) -2
D) $12e$
E) $-3e$

Riktig svar: E): $-3e$.
Begrunnelse: De partiellderiverte er $\frac{\partial f}{\partial x} = 1\cdot e^{xy} + xe^{xy}y = (1+xy)e^{xy}$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}x = x^2e^{xy}$. Dette gir $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2e$ og og $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = e$. Dermed er $f'(\mathbf{a};\mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{r} = (2e,e)\cdot(-2,1) = -4e + e = -3e$.

Oppgave 3. (3 poeng) I punktet $(2,-1)$ vokser funksjonen $f(x,y) = x^3y + 2y^2$ raskest i retningen:

A) $(2,-1)$
B) $(-3,1)$
C) $(1,-2)$
D) $(1,1)$
E) $(2,2)$

Riktig svar: B): $(-3,1)$.
Begrunnelse: Vi regner ut gradienten: $\nabla f(x,y) = (3x^2y, x^3+4y)$, som gir $\nabla f(2,-1) = (-12,4) = 4(-3,1)$. Denne vektoren peker i samme retning som $(-3,1)$.

Oppgave 4. (3 poeng) Volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a} = (1,0,-1)$, $\mathbf{b} = (1,2,1)$, $\mathbf{c} = (2,-1,3)$ er:

A) 7
B) 10
C) 14
D) 12
E) 15

Riktig svar: D): 12.
Begrunnelse: Volumet er tallverdien til determinanten definert av vektorene. Den er

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 7+0+5 = 12.$$

Oppgave 5. (3 poeng) Integralet $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$ er lik:

A) $\arccos x + C$
B) $x \arcsin x + C$
C) $\frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$
D) $\sqrt{1-x^2} \arcsin x + C$
E) $(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

Riktig svar: C): $\frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$
Begrunnelse: Setter vi $u = \arcsin x$, får vi $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ og

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int u\, du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2} \arcsin^2 x + C$$

Oppgave 6. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^2+2x-1}{(x+1)(x^2+1)^2}$, må du først:

A) finne konstantar A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x^2+1} + \frac{C}{(x^2+1)^2}$
B) finne konstantar A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)^2}$
C) polynomdividere
D) finne konstantar A, B, C, D, E slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$
E) finne konstantar A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{x+1} + \frac{C}{x^2+1} + \frac{D}{(x^2+1)^2}$

Riktig svar: D): $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$
Begrunnelse: Se reglene i læreboken.

Oppgave 7. (3 poeng) Den deriverte til funksjonen $F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$ er:

A) $\frac{\sin x}{1+x^2}$
B) $\frac{\sin x^2}{1+x^4}$

C) $\frac{x^2 \sin x^2}{1+x^4}$
D) $\frac{2x \sin x^2}{1+x^4}$
E) $2x \int_0^{x^2} \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$

Riktig svar: D): $\frac{2x \sin x^2}{1+x^4}$
Begrunnelse: Hvis $G(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt$, er $G'(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ ifølge analysens fundamentalteorem. Siden $F(x) = G(x^2)$, gir kjerneregelen

$$F'(x) = G'(x^2)(x^2)' = \frac{\sin x^2}{1+(x^2)^2} \cdot 2x = \frac{2x \sin x^2}{1+x^4}$$

Oppgave 8. (3 poeng) Området under grafen til $f(x) = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$, dreies om y-aksen. Volumet til omdreiningslegemet er

A) $2\pi^2$
B) π^3
C) π
D) $\frac{4\pi}{3}$
E) $\frac{\pi}{2}$

Riktig svar: A): $2\pi^2$
Begrunnelse: Formelen for volumet til omdreiningslegemet rundt y-aksen gir $V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx$. Vi bruker delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sin x$, dvs, $u' = 1$ og $v = -\cos x$;

$$V = 2\pi \int_0^\pi x \sin x\, dx = 2\pi \Big[-x\cos x \Big]_0^\pi - 2\pi \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x)\, dx =$$

$$= 2\pi^2 + 2\pi \Big[\sin x \Big]_0^\pi = 2\pi^2 + 0 = 2\pi^2$$

Oppgave 9. (3 poeng) Integralet $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx$ er lik:

A) $2\ln(\sqrt{x}+1) + C$
B) $2\cosh(\sqrt{x}+1) + C$
C $\ln(x+1) - \ln(\sqrt{x}+1) + C$
D) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{1+x} + C$
E) $2 \arctan \sqrt{x} + C$

Riktig svar: E): $2 \arctan \sqrt{x} + C$
Begrunnelse: Vi bruker substitusjonen $u = \sqrt{x}$ som gir $x = u^2$ og $dx = 2u\, du$:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx = \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\, dx = \int \frac{1}{u(1+u^2)}\, 2u\, du$$

$$= \int \frac{2}{(1+u^2)}\, du = 2\arctan u + C = 2\arctan\sqrt{x} + C$$

Oppgave 10. (3 poeng) Integralet $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx$:

A) er lik -1
B) er lik $-\frac{1}{2}$
C) er lik $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) divergerer
E) er lik $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Riktig svar: D): Divergerer
Begrunnelse: Dette er et uekte integral. Vi bruker substitusjonen $u = \sqrt{x} - 1$, som gir $x = (u+1)^2$ og $dx = 2(u+1)\,du$. Dermed er

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{x}-1}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_{-1}^{\sqrt{b}-1} \frac{1}{u}\,2(u+1)\,du$$

$$= \lim_{b\to 1^-} \int_{-1}^{\sqrt{b}-1} (2 - \frac{2}{u})\,du = \lim_{b\to 1^-} \Big[2 - 2\ln|u|\Big]_{-1}^{\sqrt{b}-1} = -\infty$$

siden $\lim_{b\to 1^-} \ln|\sqrt{b}-1| = -\infty$.

DEL 2

Oppgave 11. Polarkoordinatene er gitt ved $r = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$ og $\sin\theta = \frac{b}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Siden z ligger i første kvadrant, betyr dette at $\theta = \frac{\pi}{3}$. Dermed får vi

$$w_0 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{4}e^{\imath\frac{\pi}{6}} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

Den andre roten er $w_1 = -w_0 = -\sqrt{3} - i$.

b) Vi bruker løsningsformelen for annengradsligninger (abc-formelen) og kvadratrøttene fra a):

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot i\cdot(-(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}))}}{2i} = \frac{-2 \pm \sqrt{2 + 2i\sqrt{3}}}{2i} = \frac{-2 \pm (\sqrt{3} + i)}{2i}$$

Bruker vi plusstegnet, får vi

$$z_1 = \frac{-2 + (\sqrt{3} + i)}{2i} = \frac{-2i + (\sqrt{3}i + i^2)}{2i^2} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Bruker vi minustegnet, får vi

$$z_2 = \frac{-2 - (\sqrt{3} + i)}{2i} = \frac{-2i - (\sqrt{3}i + i^2)}{2i^2} = -\frac{1}{2} + i(1 + \frac{\sqrt{3}}{2})$$

Oppgave 12. a) Vi må sjekke at $AB = I_3$ (likheten $BA = I_3$ følger da av seg selv). Vi har

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 1.02 & 0.01 \\ -0.2 & -0.04 & 0.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0.2\cdot(-0.1) + 0.1\cdot 0.2 & 1\cdot(-0.2) + 0.2\cdot 1 + 0.1\cdot 0 & 1\cdot(-0.1) + 0.2\cdot 0 + 0.1\cdot 1 \\ 0.1\cdot 1 + 1.02\cdot(-0.1) + 0.01\cdot 0.2 & 0.1\cdot(-0.2) + 1.02\cdot 1 + 0.01\cdot 0 & 0.1\cdot(-0.1) + 1.02\cdot 0 + 0.01\cdot 1 \\ (-0.2)\cdot 1 + (-0.04)(-0.1) + 0.98\cdot 0.2 & (-0.2)\cdot(-0.2) + (-0.04)\cdot 1 + 0.98\cdot 0 & (-0.2)(-0.1) + (-0.04)\cdot 0 + 0.98\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) La $\mathbf{r_0}$ være bestanden det foregående året. Da er dagens bestand $\mathbf{r} = A\mathbf{r}_0$. Ganger vi fra venstre med A^{-1}, får vi $A^{-1}\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Dermed er

$$\mathbf{r}_0 = A^{-1}\mathbf{r} = B\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.1 \\ -0.1 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4000 \\ 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3500 \\ 1600 \\ 1800 \end{pmatrix}$$

Oppgave 13. Vi bruker delvis integrasjon med $u = \ln(x^2+1)$, $v' = 1$, som gir $u' = \frac{2x}{x^2+1}$, $v = x$ og

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - \int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx$$

Siden $\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2x^2+2}{x^2+1} - \frac{2}{x^2+1} = 2 - \frac{2}{x^2+1}$ (det samme resultatet oppnår vi ved polynomdivisjon), har vi

$$\int \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = \int \left(2 - \frac{2}{x^2+1}\right)dx = 2x - 2\arctan x + C$$

Dermed er

$$\int \ln(x^2+1)\,dx = x\ln(x^2+1) - 2x + 2\arctan x + C$$

Oppgave 14. a) Stigningstallet til tangenten til f i x er $f'(x)$. Beveger vi oss en avstand $(-x)$ fra punktet $(x, f(x))$, kommer vi derfor til punktet med y-koordinat $g(x) = f(x) + f'(x)(-x) = f(x) - xf'(x)$.

Deriverer vi uttrykket for $g(x)$, får vi $g'(x) = f'(x) - f'(x) - xf''(x) = -xf''(x)$. Dersom f er konkav, er $f''(x) \leq 0$ for alle x[1], og dermed er

$$g'(x) = \begin{cases} \leq 0 & \text{når } x < 0 \\ \\ \geq 0 & \text{når } x > 0 \end{cases}$$

Det betyr at $g(x)$ avtar opp til $x = 0$ og vokser etter $x = 0$. Altså er $g(0)$ minimalverdien til g.

Er omvendt f er konveks, er $f''(x) \geq 0$ for alle x, og dermed er

$$g'(x) = \begin{cases} \geq 0 & \text{når } x < 0 \\ \\ \leq 0 & \text{når } x > 0 \end{cases}$$

Det betyr at $g(x)$ vokser opp til $x = 0$ og avtar etter $x = 0$. Altså er $g(0)$ maksimalverdien til g.

b) Vi har

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a (f(x) - xf'(x))\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a xf'(x)\,dx$$

I det siste integralet bruker vi delvis integrasjon med $u = x$, $v' = f'(x)$ og får $u' = 1$ og $v = f(x)$. Dermed er

$$\int_0^a xf'(x)\,dx = \Big[xf(x)\Big]_0^a - \int_0^a f(x)\,dx = af(a) - \int_0^a f(x)\,dx$$

og vi får

$$\int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx - \int_0^a xf'(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx - af(a) + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx - af(a)$$

[1] Dette følger ikke umiddelbart fra resultater i boken (der finnes det bare en implikasjon som går motsatt vei), men det kan vises som følger: Dersom det fantes et punkt der $f''(x) > 0$, ville det – siden f'' er kontinuerlig – finnes et intervall rundt x der f'' er positiv. Dermed er f konveks på dette intervallet, og det strider mot antagelsen om at f er konkav. Denne lille subtiliteten kreves ikke til eksamen.