

Løsningsforslag til eksamen i MAT1100, H2017

Oppgave 1. a) Vi får

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 1 \cdot e^{xy} + xe^{xy}y = (1 + xy)e^{xy}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xe^{xy}x = x^2e^{xy}$$

der vi i den første utregningen har brukt både produktregelen og kjernerregelen, og i den andre bare kjernerregelen. Legg merke til at siden de partiell-deriverte er kontinuerlige, er f deriverbar.

b) Gradienten i $\mathbf{a} = (2, 1)$ er

$$\nabla f(2, 1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1), \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) \right) = ((1 + 2 \cdot 1)e^{2 \cdot 1}, 2^2e^{2 \cdot 1}) = e^2(3, 4)$$

Dette betyr at f vokser raskest i retningen $(3, 4)$ (eller $e^2(3, 4)$, om man vil). Veksten i denne retningen er lik lengden av gradientvektoren, så

$$f'(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = |\nabla f(\mathbf{a})| = |e^2(3, 4)| = e^2\sqrt{3^2 + 4^2} = e^2\sqrt{25} = 5e^2$$

Alternativt kan vi første regne ut $\mathbf{u} = \frac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}(3, 4)$, og så bruke at

$$f'(\mathbf{a}; \mathbf{u}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = (e^2(3, 4)) \cdot \left(\frac{1}{5}(3, 4)\right) = 5e^2$$

Oppgave 2. Volumet er lik tallverdien til determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Vi har

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) + 2(2 \cdot 1 - (-2)(-1)) + 1(2 \cdot 0 - 1 \cdot (-1)) = 1 + 0 + 1 = 2$$

Volumet til parallelepipedet er altså 2 volumenheter.

Oppgaven kan også løses ved å bruke trippelproduktet: $V = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$.

Oppgave 3. La $x(t)$ være høyden til fallskjermen over bakken ved tiden t . Da er

$$\tan u(t) = \frac{x(t)}{100}$$

Deriverer vi med hensyn på t , får vi

$$\frac{1}{\cos^2 u(t)} u'(t) = \frac{x'(t)}{100}$$

Dermed er

$$x'(t) = \frac{100u'(t)}{\cos^2 u(t)}$$

Vi er interessert i øyeblikket der $u(t) = \frac{\pi}{4}$. Da er $\cos^2 u(t) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ og $u'(t) = -0.03$ rad/s, og vi får

$$x'(t) = \frac{100 \cdot (-0.03)}{\frac{1}{2}} = -6$$

Det betyr at fallhastigheten er 6 meter per sekund.

Oppgave 4. a) Antallet som stemmer på P er 70% av x_1 , pluss 20% av x_2 , pluss 20% av x_3 , dvs.

$$y_1 = 0.7x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3$$

Antallet som stemmer på Q er 20% av x_1 , pluss 70% av x_2 , pluss 20% av x_3 , dvs.

$$y_2 = 0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.2x_3$$

Antallet som stemmer på R er 10% av x_1 , pluss 10% av x_2 , pluss 60% av x_3 , dvs.

$$y_3 = 0.1x_1 + 0.1x_2 + 0.6x_3$$

Dette betyr at

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

og følgelig er

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

b) Siden $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$, er $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{y} = B\mathbf{y}$. Dette gir

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1.6 & -0.4 & -0.4 \\ -0.4 & 1.6 & -0.4 \\ -0.2 & -0.2 & 1.8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 800 \\ 700 \\ 500 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.6 \cdot 800 + (-0.4) \cdot 700 + (-0.4) \cdot 500 \\ (-0.4) \cdot 800 + 1.6 \cdot 700 + (-0.4) \cdot 500 \\ (-0.2) \cdot 800 + (-0.2) \cdot 700 + 1.8 \cdot 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 600 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Det var altså 800 som sa de ville stemme på P , 600 som sa de ville stemme på Q , og 600 som sa de ville stemme på R .

Oppgave 5. a) Vi prøver substitusjonen $z = \sqrt{x}$. Da er $x = z^2$, så $dx = 2z dz$. Dermed er

$$I = \int \cos(\sqrt{x}) dx = \int \cos(z) 2z dz = \int 2z \cos z dz$$

Vi bruker nå delvis integrasjon med $u = 2z$ og $v' = \cos z$. Da er $u' = 2$ og $v = \sin z$, og vi får

$$I = 2z \sin z - \int 2 \sin z dz = 2z \sin z + 2 \cos z + C = 2\sqrt{x} \sin \sqrt{x} + 2 \cos \sqrt{x} + C$$

b) Vi fullfører kvadratet i nevner:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{x^2 + 6x + 18} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 6x + 9) + 9} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+3)^2 + 9} dx = \frac{1}{9} \int \frac{1}{\left(\frac{x+3}{3}\right)^2 + 1} dx \end{aligned}$$

Setter vi $u = \frac{x+3}{3}$, får vi $dx = 3 du$ og

$$I = \frac{1}{9} \int \frac{3}{u^2 + 1} du = \frac{1}{3} \arctan u + C = \frac{1}{3} \arctan \frac{x+3}{3} + C$$

Oppgave 6. a) Vi har $|g(x)| = |e^{-x} \sin(e^x)| \leq e^{-x}$. Siden $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$, får vi også $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$.

Deriverer vi, ser vi at

$$g'(x) = -e^{-x} \sin(e^x) + e^{-x} \cos(e^x) e^x = -e^{-x} \sin(e^x) + \cos(e^x)$$

Det første leddet går mot null, mens det andre varierer mellom -1 og 1 , så grensen eksisterer ikke.

b) Derivasjon gir

$$(f(x) + f'(x)(b-x))' = f'(x) + f''(x)(b-x) + f'(x) \cdot (-1) = f''(x)(b-x).$$

Dette betyr at $f(x) + f'(x)(b-x)$ er en antiderivert til $f''(x)(b-x)$, så ifølge analysens fundamentalteorem er

$$\begin{aligned} \int_a^b f''(x)(b-x) dx &= \left[f(x) + f'(x)(b-x) \right]_a^b \\ &= f(b) + f'(b)(b-b) - (f(a) + f'(a)(b-a)) = f(b) - f(a) - f'(a)(b-a). \end{aligned}$$

c) Siden $|f''(t)| \leq M$ for alle t , er

$$\left| \int_a^b f''(x)(b-x) dx \right| \leq \int_a^b M(b-x) dx = \left[-\frac{1}{2} M(b-x)^2 \right]_a^b = \frac{1}{2} M(b-a)^2.$$

Kombinerer vi dette med resultatet i a), får vi

$$\frac{1}{2}M(b-a)^2 \geq |f(b) - f(a) - f'(a)(b-a)|$$

Dette betyr at avstanden mellom $f(b) - f(a)$ og $f'(a)(b-a)$ er mindre enn eller lik $\frac{1}{2}M(b-a)^2$, og følgelig kan ikke $|f(b) - f(a)|$ være mindre enn $|f'(a)(b-a)| - \frac{1}{2}M(b-a)^2$. Altså er

$$|f(b) - f(a)| \geq |f'(a)(b-a)| - \frac{1}{2}M(b-a)^2 = \left(|f'(a)| - \frac{1}{2}M(b-a) \right) (b-a)$$

d) Setter vi inn i formelen i c) og bruker at $|f'(a)| \geq \epsilon$ og $b-a = \frac{\epsilon}{M}$, får vi

$$|f(b) - f(a)| \geq \left(\epsilon - \frac{1}{2}M \frac{\epsilon}{M} \right) \frac{\epsilon}{M} = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{\epsilon}{M} = \frac{\epsilon^2}{2M}$$

Anta for motsigelse at $f'(x)$ ikke går mot 0. Da finnes det en $\epsilon > 0$ slik at $f'(x) \geq \epsilon$ for vilkårlig store x . Mer presist finnes det for hver $n \in \mathbb{N}$ et tall $a_n \geq n$ slik at $|f'(a_n)| \geq \epsilon$. Setter vi $a = a_n$ i formelen ovenfor, får vi

$$|f(b_n) - f(a_n)| \geq \frac{\epsilon^2}{2M}$$

der $b_n = a_n + \frac{\epsilon}{M}$. Dette er en selvmotsigelse siden $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$, og $|f(b_n) - f(a_n)|$ derfor må bli mindre enn $\frac{\epsilon^2}{2M}$ når n går mot uendelig.