Løsningsforslag eksamen Mat1100 tirsdag 04.12.2018

Oppgave 1

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} x \cdot f(x)\, dx = 2\pi \cdot \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x\, dx$$

$$= 2\pi \left\{ \left[x \sin x \right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin x\, dx \right\}$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Delvis} & F(x) = x & G'(x) = \cos x \\ & F'(x) = 1 & G(x) = \sin x \end{array}}$$

$$= 2\pi \left\{ \left[\frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \right] + \left[\cos x \right]_0^{\pi/2} \right\}$$

$$= 2\pi \left\{ \frac{\pi}{2} + [0 - 1] \right\} = 2\pi \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = \underline{\underline{\pi^2 - 2\pi}}$$

Oppgave 2

a) $f(x,y,z) = e^{5xy} + \sin z$ gir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(5y e^{5xy}, 5x e^{5xy}, \cos z \right)$$

Så

$$\nabla f(\vec{0}) = \underline{\underline{(0,0,1)}}$$

b) $$f'(\vec{0}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{0}) \cdot \vec{r}$$

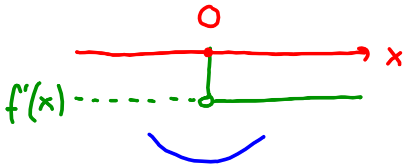
$$= (0,0,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$$

Den retningsderiverte av f ut fra punktet $\vec{0}$ er størst i retningen $\underline{\underline{(0,0,1)}}$, fordi gradienten $\nabla f(\vec{0})$ har den retningen.

Oppgave 3

a) $f(x) = \arctan(x^2)$ gir

$$f'(x) = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$$



f har globalt minimumspunkt $x = 0$

b) Siden f er kontinuerlig på hele $\mathbb{R}$, har den ingen vertikale asymptoter.
Vi har

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \arctan(x^2) = \frac{\pi}{2}$$

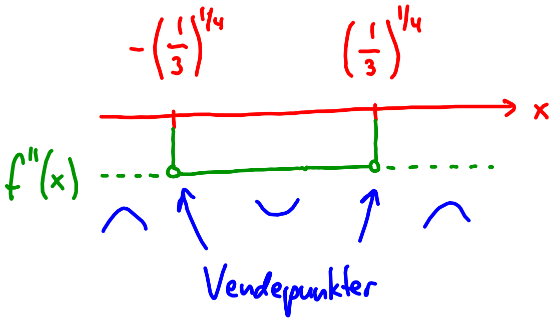
Alltså er $y = \frac{\pi}{2}$ en horisontal asymptote for f (tosidig).

Vi har

$$f''(x) = \left(\frac{2x}{1+x^4}\right)' = \frac{2(1+x^4) - 2x\cdot 4x^3}{(1+x^4)^2}$$

$$= \frac{2+2x^4 - 8x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} = \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2}$$

$1-3x^4 = 0$ gir $x^4 = \frac{1}{3}$, dvs. $x = \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}$



Vi ser at f er konveks på $\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}, \left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}\right]$ og konkav på $\left(-\infty, -\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}\right]$ og $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}, \infty\right)$. Vendepunkter: $x = \pm\left(\frac{1}{3}\right)^{1/4}$

(Oppgave 3 forts.)

c) $g(x,y) = \arctan(x^2) + e^{y^2}$ gir

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \underline{\underline{\frac{2x}{1+x^4}}} \quad \text{og} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \underline{\underline{2y\,e^{y^2}}}$$

d) Vi vet fra a) at uttrykket $\arctan(x^2)$ har et globalt minimum for $x = 0$. Samtidig følger, for eksempel fra uttrykket for $\frac{\partial g}{\partial y}$, at uttrykket e^{y^2} har et globalt minimum for $y = 0$. Altså:

$$\underline{\underline{(x,y) = (0,0) \text{ er et minimalpunkt for } g}}$$

Funksjonen g har ingen maksimalpunkter, for siden

$$\lim_{y \to \infty} e^{y^2} = +\infty$$

kan $g(x,y)$ oppnå vilkårlig store verdier.

Oppgave 4

a) Teksten sier at

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{antall unge neste måned}) = 3x_n + 10y_n \\ y_{n+1} = (\text{-- " -- voksne -- " --}) = 0{,}80\,x_n \\ z_{n+1} = (\text{-- " -- gamle -- " --}) = 0{,}50\,y_n \end{cases}$$

Altså

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_n + 10y_n + 0z_n \\ 0{,}8x_n + 0y_n + 0z_n \\ 0x_n + 0{,}5y_n + 0z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$$

Så

$$M = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}}}$$

(Oppgave 4 forts.)

Vi har
$$\begin{vmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 \end{vmatrix} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0{,}5 \end{vmatrix}$$
$$= 3 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 0 = 0$$

Siden $\det(M) = 0$, er <u>M ikke inverterbar.</u>

b)
$$A = M^3 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 30 & 0 \\ 2{,}4 & 8 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 17 & 30 & 0 \\ 2{,}4 & 8 & 0 \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 10 & 0 \\ 0{,}8 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 & 170 & 0 \\ 13{,}6 & 24 & 0 \\ 1{,}2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 75 & 170 & 0 \\ 13{,}6 & 24 & 0 \\ 1{,}2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden M ikke er inverterbar, finnes det ingen matrise for å regne seg en måned bakover i tiden. (Se kommentar siste side.)

Oppgave 5

a)
$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{2\cancel{x}}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

$$\boxed{\begin{aligned} & u = x^2, \quad \frac{du}{dx} = 2x \\ & du = 2x\,dx, \quad dx = \frac{1}{2x}\,du \end{aligned}}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin u + C$$
$$= \frac{1}{2}\arcsin(x^2) + C$$

(Oppgave 5 forts.)

b) Integralet oppfører seg essensielt som $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$, som vi vet er et konvergent p-integral.

Bruker grense-sammenlikningstesten (GS-testen):

$$L = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-\sin x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-\sin x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\underbrace{\frac{\sin x}{x^2}}_{\to 0}} = 1$$

Altså konvergerer integralet ved GS-testen.

Oppgave 6

$$\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} e^{x^2+y} - 1 \\ x^2+y \end{pmatrix}$$ har Jacobimatrise

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x e^{x^2+y} & e^{x^2+y} \\ 2x & 1 \end{pmatrix}$$

(Oppgave 6 forts.)

Siden alle komponentene i $J = \vec{F}'(x,y)$ er kontinuerlige på hele $\mathbb{R}^2$, vet vi at funksjonen $\vec{F}$ er deriverbar i origo. Dermed vet vi at Jacobimatrisen til $\vec{F}$ i origo, altså matrisen

$$\vec{F}'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

oppfyller

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\vec{F}\left(\vec{0} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) - \vec{F}(\vec{0}) - \vec{F}'(0,0)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Lar vi $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ og setter inn $\vec{F}(\vec{0}) = \vec{0}$, gir dette

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\vec{F}(x,y) - M\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \vec{0}$$

(Se setning 2.6.4 og definisjon 2.6.2 i FLVA)

Kommentar til oppgave 4b)

Slik spørsmålet er stilt, er standard i tradisjonen å oppfatte det som et spørsmål om det fins en matrise som tar oss ett hakk bakover i tiden fra en vilkårlig valgt tilstand. Svaret er da nei, som indikert foran. Imidlertid viste det seg ved sensuren at minst en student oppfattet det som et spørsmål om det fins en matrise for å regne seg ett hakk bakover gitt at tilstanden er fremkommet ved å bruke overgangsmatrisen M minst en gang. Svaret på spørsmålet blir da ja. Matrisen for å regne seg ett hakk bakover er da ikke entydig bestemt. Et eksempel på en slik matrise er

$$\begin{pmatrix} 0 & 5/4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1/16 & -3/8 \end{pmatrix}$$

Det ble gitt full skår på 4b) også for å finne en slik matrise.