LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN MAT 1100

(1)

$$f(x,y,z) = y^2 \tan(x z^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \underline{y^2 z^3 \frac{1}{\cos^2(xz^3)}} = \underline{y^2 z^3 \left(1 + \tan^2(xz^3)\right)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \underline{2y \tan(xz^3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \underline{3y^2 z^2 x \frac{1}{\cos^2(xz^3)}} = \underline{3xy^2z^2\left(1 + \tan^2(xz^3)\right)}$$

(2)

$$f(x,y) = x^3 y + x^2 \qquad \vec{a} = (1,-1)$$

$$\vec{\nabla} f(x,y) = (3x^2 y + 2x,\ x^3)$$

I $\vec{a} = (1,-1)$ vokser f raskest i retningen

$\vec{\nabla} f(1,-1) = (-1,1)$ med <u>stigningstall</u>

$$\underline{|\vec{\nabla} f(1,-1)|} = \sqrt{1^2+1^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

(3) Pyramiden med hjørner i $(1,2,3)$, $(2,3,-4)$, $(3,-4,5)$, $(-4,5,6)$ har volum

$$\underline{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\left((2,3,-4) - (1,2,3)\right) \times \left((3,-4,5) - (1,2,3)\right)\right) \cdot \left((-4,5,6) - (1,2,3)\right)\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 2 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & 3 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}\left| 1\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + (-7)\begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}\right|$$

$$= \frac{1}{6}\left| -24 - 16 + 7 \cdot 24 \right| = \underline{\underline{\frac{64}{3}}}$$

④ a

$$M(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(2)\,M(3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(1)\,M(2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M(a)^3 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $$M(a)\,M(b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$M(a)\,M(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ hvis og bare hvis $a + b = 0$

så $M(-a)$ er invers matrisen til $M(a)$

$$M(a)^{-1} = M(-a) = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

⑤ $$I = \int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$$

$\dfrac{\arctan x}{x^2} \to 0$ når $x \to \infty$, siden $\lim\limits_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$

og $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

Videre er
$$0 < \frac{\arctan x}{x^2} < \frac{\pi}{2x^2} \quad \text{når } x \in (1, \infty)$$

og $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^a = \lim_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = \underline{1},$$

så $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ konvergerer.

Av sammenligningskriteriet konvergerer også $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2}\,dx$.

(6)

$$f(x) = \int_1^{2x^2} e^{3t}\,dt \qquad x \in [1,\infty)$$

Av fundamentalsetningen og kjerneregelen er

$$f'(x) = e^{3(2x^2)} \cdot (2x^2)' = 4x\,e^{6x^2}$$

og

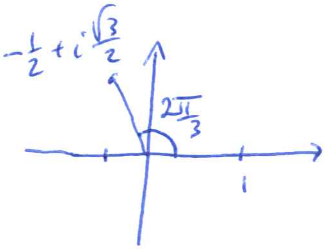
$$\underline{f''(x)} = 4e^{6x^2} + 4x \cdot 12x \cdot e^{6x^2} = \underline{(4+48x^2)e^{6x^2}}$$

(7) a

$$x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$$



Så røttene til x^2+x+1 er

$$\underline{x_1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{e^{i\frac{2\pi}{3}}}$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

b

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2)^2 + x^2 + 1$$

$$= (x^2 - x_1)(x^2 - x_2)$$

$$x^2 = x_1 \Rightarrow x = e^{i(\frac{\pi}{3} + k\pi)} \qquad k = 0,1$$

$$x^2 = x_2 \Rightarrow x = e^{i(\frac{2\pi}{3} + k\pi)} \qquad k = 0,1$$

Så røttene til $x^4 + x^2 + 1$ er $e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}, e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

det vil si, $\pm\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Derfor ~~~~ faktorisere

$$x^4+x^2+1 = \left(x-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \left(\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)\left(\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)$$

$$= \underline{(x^2-x+1)}\underline{(x^2+x+1)} \quad (*)$$

Det siste $(*)$ er en reell faktorisering.

$a, b, c \in \mathbb{R}$

(8)

$$f(x) = \begin{cases} c & x=0 \\ \dfrac{ax\cos x}{\sin x}+2 & 0<x<\frac{\pi}{2} \\ bx+1 & \frac{\pi}{2}\le x\le 2 \end{cases}$$

a) $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ax\cos x}{\sin x}+2\right)$$

$$= a\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}+2 \qquad \text{siden } \lim_{x\to 0^+}\cos x = 1$$

$$= \underline{a+2} \qquad \text{siden } \lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x} = 1.$$

$f(0)=c$, så f er kontinuerlig i $x=0$ dersom $\underline{c=a+2}$. $(a\in\mathbb{R})$

b) $f(x)$ er kontinuerlig i $(0,\frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2},2]$, der den er definert av henholdsvis $\frac{ax\cos x}{\sin x}+2$ og $bx+1$.

I $x=0$ er f kontinuerlig om $c=a+2$ (av a)).

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\frac{ax\cos x}{\sin x}+2\right) = 2 \qquad \text{siden } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x = 0 \text{ og } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sin x = 1.$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} bx+1 = \frac{\pi}{2}\cdot b+1$$

Så f er kontinuerlig i $x = \frac{\pi}{2}$ om

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x),$$ det vil si

$$2 = \frac{\pi}{2} b + 1$$

$$\underline{b = \frac{2}{\pi}}$$

f er deriverbar på $(0, \frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2}, 2)$, og

deriverbar i $x = \frac{\pi}{2}$ om f er kontinuerlig i

$x = \frac{\pi}{2}$ og $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f'(x)$. (*)

$$\cancel{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} a\cos x - ax\sin x}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{(a\cos x - ax\sin x)\sin x - ax\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{a\sin x\cos x - ax}{\sin^2 x} = a\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{x}{\sin^2 x}\right)$$

$$= \underline{-a \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f'(x) = b$$

Så (*) er oppfyllt om $b = -a\frac{\pi}{2}$.

Derfor er f kontinuerlig på $[0, 2]$ og deriverbar på $(0, 2)$ om $c = a + 2$, $b = \frac{2}{\pi}$, $b = -a\frac{\pi}{2}$

det vil si $\underline{a} = -\frac{2}{\pi} b = \underline{-\frac{4}{\pi^2}}$,

$$\underline{b = \frac{2}{\pi}}$$

og $\underline{c = 2 - \frac{4}{\pi^2}}$

8c

f er <u>begrenset</u> for alle $a, b, c \in \mathbb{R}$

og <u>kontinuerlig på</u> $(0, \frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2}, 2]$

for alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, det vil si på

<u>hele intervallet unntatt i to punkter.</u>

Da er f integrerbar på hele det

lukkede intervallet $[0, 2]$.

Alternativt: f er deriverbar på $(0, \frac{\pi}{2})$ og $(\frac{\pi}{2}, 2)$

og begrenset på $[0, 2]$, så f er stykkevis

monoton på $[0, 2]$ (det vil si at det fins

$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = 2$ slik at f er monoton på

$(a_0, a_1), (a_1, a_2), \dots (a_{n-1}, a_n)$).

Når f er begrenset og stykkevis monoton på $[0, 2]$, så

er f integrerbar.