Løsningsforslag eksamen MAT1100 30.11.2020

Oppgave 1

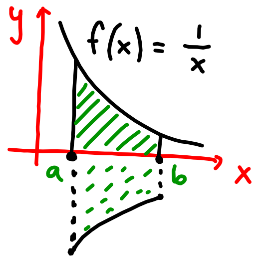
$f(x,y,z) = xy^2z^3$ gir

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2\right)$$

$$\nabla f(1,1,1) = (1,2,3)$$

Den retningsderiverte er størst i retningen $\underline{(1,2,3)}$ ut fra $(1,1,1)$

Oppgave 2



$$V = \int_a^b \pi\,[f(x)]^2\,dx = \pi \int_a^b \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_a^b x^{-2}\,dx$$

$$= \pi\left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \pi\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$$

Volumet V av omdreiningslegemet som fås når grafen til f på intervallet $[a,b]$ dreies om x-aksen, er altså

$$V = \underline{\frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{b}}$$

Kravet $V = 100$ gir $\frac{\pi}{a} - \frac{\pi}{b} = 100$.

For enkelhets skyld velger vi $\underline{b = \pi}$. Kravet blir da

$$\frac{\pi}{a} - 1 = 100, \quad \text{dvs.} \quad \frac{\pi}{a} = 101$$

Dette gir $\underline{a = \frac{\pi}{101}}$

Oppgave 3

$$\int u\,du = \int \arctan(7x)\cdot\frac{7}{1+49x^2}\,dx$$

(regner baklengs først)

$u = \arctan 7x$ gir $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+(7x)^2}\cdot 7$

$du = \dfrac{7}{1+49x^2}\,dx$

Velger da integralet

$$\int \frac{\arctan(7x)}{1+49x^2}\,dx$$

(Kommentar: Kunne beholdt faktoren 7 også. Droppet den av estetiske grunner)

Løser dette:

$$\int \frac{\arctan 7x}{1+49x^2}\,dx = \int \frac{u}{\cancel{1+49x^2}}\cdot\frac{\cancel{1+49x^2}}{7}\,du$$

$u = \arctan 7x$ $\quad \dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{1+(7x)^2}\cdot 7$

$du = \dfrac{7}{1+49x^2}\,dx \quad dx = \dfrac{1+49x^2}{7}\,du$

$$= \int u\,du$$

$$= \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{2}u^2 + C$$

$$= \frac{1}{14}(\arctan 7x)^2 + C$$

Oppgave 4

Velger følgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ med $a_n = \underline{\underline{5 - \frac{1}{n}}}$

Denne konvergerer mot 5, fordi

$$\lim_{n\to\infty} \left(5 - \frac{1}{n}\right) = 5$$

Videre er den strengt voksende, fordi vi for alle $n \geq 1$ har

$$a_{n+1} = 5 - \frac{1}{n+1} > 5 - \frac{1}{n} = a_n$$

Oppgave 5

$\frac{\pi}{3} \cdot 2 = \frac{2\pi}{3}$ må være et argument for z

Altså

$$\begin{aligned} z &= 4e^{i(2\pi/3)} \\ &= 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \underline{\underline{-2 + 2\sqrt{3}\,i}} \end{aligned}$$

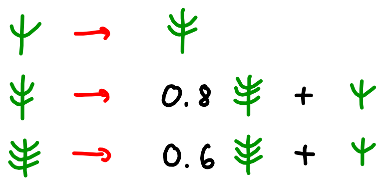
Oppgave 6

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= z \rightsquigarrow xz \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y \rightsquigarrow \frac{1}{2}y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= x \rightsquigarrow xz \end{aligned}\right\}$$

Kan bruke $f(x,y,z) = \underline{\underline{xz + \frac{1}{2}y^2}}$

Oppgave 7

a) Modell:



Altså

$$\begin{cases} x_{n+1} = (\text{nye år } n+1) = y_n + z_n = 0x_n + 1y_n + 1z_n \\ y_{n+1} = (\text{unge år } n+1) = x_n = 1x_n + 0y_n + 0z_n \\ z_{n+1} = (\text{voksne år } n+1) = 0.8y_n + 0.6z_n = 0x_n + 0.8y_n + 0.6z_n \end{cases}$$

Så

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}}$$

b) Vi har

$$\det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{5} \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot 0 - 1 \cdot \left(\frac{3}{5} - 0\right) + 1 \cdot \left(\frac{4}{5} - 0\right) = \frac{1}{5} \neq 0$$

Altså er M inverterbar. Vi kan da velge $\underline{\underline{N = M^{-1}}}$

c) Modellen er nå

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2y_n + z_n = 0x_n + 2y_n + 1z_n \\ y_{n+1} = x_n = 1x_n + 0y_n + 0z_n \\ z_{n+1} = 0.5y_n + 0.6z_n = 0x_n + 0.5y_n + 0.6z_n \end{cases} \qquad \text{Så } M = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.6 \end{pmatrix}}}$$

Oppgave 8

La $g(x) = f(x) - f'(x)$

Da er $g(0) = f(0) - f'(0) = 0$

$g(1) = f(1) - f'(1) = 0$

Videre er $g'(x) = f'(x) - f''(x)$, for siden f er to ganger deriverbar, er g deriverbar. Rolles teorem gir da at det fins $c \in (0,1)$ slik at

$$g'(c) = f'(c) - f''(c) = 0$$

Altså $$f'(c) = f''(c)$$

Oppgave 9

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos \frac{1}{x^2} & \text{for } x \neq 0 \\ 0 & \text{for } x = 0. \end{cases}$$

a) $$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

0

Begrenset av ± 1

$$= 0 = f(0)$$

Altså er f kontinuerlig i $x = 0$.

b) $$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^3 \cos\left(\frac{1}{h^2}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{h^2}\right)$$

0

Begrenset av ± 1

$$= 0$$

Altså er f deriverbar i $x = 0$, med $f'(0) = 0$.

Kommentar til oppgave 9b)

Hvis $x \neq 0$, har vi

$$f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) - x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

$$= 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Vi får da

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \underbrace{3x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0} + 2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Denne grensen eksisterer ikke, siden leddet $\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$ vil gå fortere og fortere opp og ned mellom 1 og −1 når $x \to 0$.

Funksjonen f er likevel deriverbar i $x = 0$, men den deriverte er diskontinuerlig i dette punktet.

På den annen side: Hvis grensen $\lim_{x \to 0} f'(x)$ hadde eksistert, kunne vi konkludert med at funksjonen f er deriverbar i $x = 0$, og at $f'(0) = \lim_{x \to 0} f'(x)$. Dette fordi vi allerede vet fra a) at f er kontinuerlig i $x = 0$. Bevis:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(h)}{1} = \lim_{h \to 0} f'(h)$$

Her bruker vi at f er kontinuerlig i 0. Da blir dette et $\left[\frac{0}{0}\right]$-uttrykk, så vi kan bruke l'Hopital.