Fasit kontinuasjonseksamen i MAT 1100, 8/1-04

DEL 1

1. b) $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$. (Hint: Bruk substitusjon $u = x^2$.)

2. c) $2\ln(x+1) - \ln(x-3) + C)$). (Hint: Delbrøkoppspalting)

3. c) $\int_0^1 \sin u \, e^u \, du$ (Hint: $x = e^u$, $dx = e^u \, du$. Husk å skifte grenser!)

4. e) $2\pi \int_0^\pi x \sin x \, dx$

5. a) Divergerer (Hint: Integranden går mot uendelig når $x \to 1^+$, og vi har derfor $\int_1^e \frac{1}{x \ln x} \, dx = \lim_{c \to 1^+} \int_c^e \frac{1}{x \ln x} \, dx$. Sett $u = \ln x$ for å løse integralet, og bruk til slutt at $\ln(\ln c) \to -\infty$ når $c \to 1^+$.)

6. c) $(1, 4ye^{-z}, -2y^2 e^{-z})$

7. c) -4 (Hint: Bruk $f(\mathbf{a}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{r}$)

8. a) $(-4, 4)$ (Hint: Funksjonen stiger raskest i gradientens retning.)

9. e) 0 (Hint: Bytt til polarkoordinater.)

10. e) $12x^2y^4\cos(xy^2) + 24xy^2\sin(xy^2)$ (Hint: To løsningsmetoder: (i) Bruk kjerneregelen, (ii) Regn ut $k(x, y)$ og deriver på vanlig måte.)

DEL 2

Oppgave 1:
a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 6y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = 6x + 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 6$

b) Sadelpunkt (Hint: Vi får $A = 3$, $B = 6$, $C = 6$ og $D = -18$. Siden $D < 0$, forteller annenderiverttesten oss at dette er et sadelpunkt).

Oppgave 2:
$\pm(2\sqrt{3} - 2i)$ (Hint: Skriv z på polarform, ta roten til r og halvparten til θ)

Oppgave 3:
a) $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = \frac{1}{2}$

b) $-\frac{\arctan x}{(x+1)^2} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C$ (Hint: Hvis du delvis integrerer med $u = \arctan x$, $v' = \frac{1}{(x+1)^2}$, får du uttrykket i a). Resten er standard delbrøkoppspalting.)

Oppgave 4: 31.25m/s (Hint: Kall avstanden fra radaren til bilen ved tiden t for $y(t)$ og avstanden fra (bunnen av) stolpen til bilen ved samme tidspunkt for $x(t)$. Da forteller Pythagoras oss at $y(t)^2 = x(t)^2 + 7^2$. Deriverer vi dette uttrykket med hensyn på tiden t, får vi $2yy' = 2xx'$. I dette uttrykket kjenner vi $y = 24$, $y' = -30$ og kan finne x ved Pythagoras ($x = 25$). Dermed kan vi regne ut x' og finne farten til bilen.

Oppgave 5: Kort løsningsforslag: Hvis vi løser opp parentesene, forkorter summen seg til $f(0) - f(1) = 0$ siden alle ledd unntatt $f(0)$ og $f(1)$ forekommer to ganger med motsatt fortegn. Dersom ett av leddene i summen er forskjellig fra null, må det finnes minst ett ledd med motsatt fortegn for ellers kan summen umulig bli null. Legg merke til at $g(0), g(\frac{1}{N}), g(\frac{2}{N}) \ldots, g(\frac{N-1}{N})$ gir oss leddene i summen. Enten er alle disse uttrykkene 0 (og da har vi funnet punkter der g er null), ellers så må minst to av disse g-verdiene ha motsatt fortegn. Ifølge skjæringssetningen må g da ha ett nullpunkt (siden f er kontinuerlig, vil g også være det).