Kontinuasjonseksamen i MAT 1100 — 11/1-2007

Første del av eksamen inneholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hver. Det er kun ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hvert av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunne hvordan du har kommet frem til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige!

DEL 1

1. (3 poeng) Hva er den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial y}$ når $f(x, y, z) = \arctan(xy)$?

☐ $\frac{1}{1+x^2y^2}$
☐ $\frac{y}{1+x^2y^2}$
☐ $\frac{1}{\sqrt{1-x^2y^2}}$
☐ $\frac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}$
☐ $\frac{x}{1+x^2y^2}$

2. (3 poeng) I hvilken retning stiger funksjonen $f(x, y, z) = 3x^2yz$ raskest i punktet $(1, 2, -1)$?

☐ $(-4, -1, 2)$
☐ $(-6, 7, 5)$
☐ $(-12, 4, 7)$
☐ $(1, 4, 0)$
☐ $(-3, 2, 6)$

3. (3 poeng) Hva er den dobbeltderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ til funksjonen $f(x, y) = x^2e^{xy^2}$?

☐ $2xye^{xy^2}$
☐ $(6x^2y + 2x^3y^3)e^{xy^2}$
☐ $6x^2e^{xy^2}$
☐ $4xye^{xy^2}$
☐ $(2xy^2 + 4xy)e^{xy^2}$

4. (3 poeng) Når vi substituerer $u = \sqrt{x}$ i integralet $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}\, dx$, får vi

☐ $\int \frac{u}{u+1}\, du$
☐ $\frac{1}{2u} \int \frac{u}{u+1}\, du$
☐ $\int \frac{u}{u+1} \frac{1}{2\sqrt{x}}\, du$
☐ $\int \frac{2u^2}{u+1}\, du$
☐ $\int \frac{1}{2(u+1)}\, du$

5. (3 poeng) Når vi bruker delvis integrasjon på integralet $\int \frac{x}{\sin^2 x}\, dx$, får vi

☐ $-x \cot x + \int \cot x\, dx$
☐ $x \arctan x + \int \arctan x\, dx$
☐ $-x \arcsin x + \int \arcsin x\, dx$

☐ $x\ln(\sin^2 x) + \int \ln(\sin^2 x)\, dx$
☐ $-\frac{x}{\sin x} + \int \frac{1}{\sin x}\, dx$

6. (3 poeng) Integralet $\int \ln(1+x^2)\, dx$ er lik:
☐ $x^2 + \frac{1}{2}\arctan x + C$
☐ $\ln(1+x^2) + C$
☐ $x\ln(1+x^2) + C$
☐ $\frac{2x}{(1+x^2)^2} + C$
☐ $x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan x + C$

7. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_0^\infty \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx$ er lik:
☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $10\sqrt{2}$
☐ integralet divergerer
☐ e
☐ $3\pi^2$

8. (3 poeng) Den inverse matrisen til $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ er:
☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
☐ $\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

9. (3 poeng) Anta $\mathbf{v}$ er en egenvektor for matrisen A med egenverdi 2. Da er $A^5\mathbf{v}$ lik:
☐ 32
☐ $32A$
☐ $2Av^5$
☐ $32\mathbf{v}$
☐ Har ikke nok informasjon til å avgjøre hvilket av alternativene ovenfor som er det rette

10. (3 poeng) Lineæravbildningen $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avbilder enhver vektor på sitt speilbilde om linjen $y = \sqrt{3}x$. Matrisen til $\mathbf{T}$ er:

☐ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$
☐ $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\square$ $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\square$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{pmatrix}$

DEL 2

HUSK AT I DENNE DELEN MÅ DU BEGRUNNE ALLE SVARENE DINE!

Oppgave 1

a) (10 poeng) Finn tall A, B og C slik at

$$\frac{x^2+6x-3}{(x-1)(x^2+4x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4x+5}$$

b) (10 poeng) Løs integralet $\frac{x^2+6x-3}{(x-1)(x^2+4x+5} \, dx$

Oppgave 2 (10 poeng)

På en busstasjon møtes tre ruter A, B og C. Av de reisende på rute A fortsetter 30% med rute A, 20% bytter til rute B, 10% bytter til rute C mens resten ikke fortsetter med buss. Av de reisende med rute B, bytter 25% til linje A, 15% fortsetter med rute B, 20% bytter til rute C mens resten ikke fortsetter med buss. Av de reisende på rute C bytter 20% til rute A, 20% bytter til rute B, 35% fortsetter med rute C mens resten ikke fortsetter med buss. I tillegg kommer det 15 nye pasasjerer på rute A, 10 på rute B og 5 på rute C.

Anta at x, y og z er antall reisende med henholdsvis rute A, B og C før bussene kommer til stasjonen, og la x',y', z' være antall reisende på hver rute etter at bussene har vært på stasjonen. La $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ og $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Finn en matrise M og en vektor b slik at

$$\mathbf{x}' = M\mathbf{x} + \mathbf{b}$$

Anta at det er 30 passasjerer på rute A, 40 passasjerer på rute B og 40 passasjerer på rute C når bussene kommer inn til stasjonen, Er det flere eller færre passasjerer på bussene til sammen når de kjører ut av stasjonen?

Oppgave 3 (10 poeng)

Lufttrykket i et punkt (x, y, z) i atmosfæren er $P(x, y, z)$. Et fly befinner seg i punktet $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ved tiden t og beveger seg langs en bane der lufttrykket er konstant. Vis at hastighetsvektoren $\mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ alltid står normalt på gradienten $\nabla P(\mathbf{r}(t)$.

Oppgave 4 (10 poeng)

Løs integralet

$$\int_0^1 x \arcsin x \, dx$$

Oppgave 5 (10 poeng)
Hva er volumet til den største sylinderen som kan plasseres inni en kule med radius R?

Oppgave 6 (10 poeng)
(i) Bevis denne setningen:

Setning: *Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon slik at f' er kontinuerlig i 0. Anta videre at $\{a_n\}$ og $\{b_n\}$ er to følger som konvergerer mot null slik at $a_n \neq b_n$ for alle n. Vis at*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} = f'(0)$$

(ii) Bruk funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ \\ 0 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

til å vise at resultatet ovenfor ikke holder dersom vi fjerner betingelse om at f' er kontinuerlig i 0.

Slutt

Fasit

Del 1: 1e),2a),3b),4d),5a),6e),7c),8d),9d),10d)
Del 2: **1**a) $A = \frac{2}{5}, B = \frac{3}{5}, C = 5$
2: $M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.25 & 0.2 \\ 0.2 & 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.35 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$
Det kommer 110 inn på stasjonene, og kjører 102 ut.
4. $\frac{x^2}{2} \arcsin x + \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4} \arcsin x + C$
5. $V = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9} R^3$