UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1100 — Kalkulus
Eksamensdag:	Fredag 14. januar 2011.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Første del av eksamen innholder 10 flervalgsoppgaver som teller 3 poeng hever. Det er bare ett riktig svaralternativ på hver av disse oppgavene. Hvis du svarer galt, eller lar være å svare, får du null poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Andre del av eksamen inneholder tradisjonelle oppgaver. I denne delen teller hver av de 7 delspørsmålene 10 poeng. I andre del av eksamen må du begrunnne hvordan du har kommet fram til resultatene dine. Svar som ikke er begrunnet, får 0 poeng selv om de er riktige. *Lykke til!*

(Fortsettes på side 2.)

Del 1

Oppgave 1. (3 poeng). Den partiellderiverte $\frac{\partial f}{\partial x}$ til funksjonen

$$f(x,y) = \frac{1}{\sin(x) + \cos(y)} \text{ er:}$$

A $\cos(x)\ln(\sin(x) + \cos(y))$
B $1/(\sin(x) + \cos(y))$
C $1/(\sin(x) + \cos(y))^2$
✓**D** $-\cos(x)/(\sin(x) + \cos(y))^2$
E $(-\sin(y))/(\cos(x) + \sin(y))^2$

Oppgave 2. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x,y) = 1/(1 + x^2 + 2y^2),$$

vokser i punktet $(1,1)$ raskest i retningen

A $(1,-2)$
B $(-1,2)$
✓**C** $(-1,-2)$
D $(1,2)$
E $(-2,-1)$

Oppgave 3. (3 poeng). Den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ til funksjonen $f(x,y) = y\ln(1+x)$ når $\mathbf{a} = (0,1)$ og $\mathbf{r} = (0,1)$ er

✓**A** 0
B 1
C 2
D -1
E -2

Oppgave 4. (3 poeng). Arealet av trekanten med hjørner $(1,2)$, $(3,4)$ og $(5,6)$ er

A 4
B 3
C 2
D 1
✓**E** 0

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. (3 poeng). Den inverse til matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ er:}$$

A $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

B $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

✓**C** $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

D $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

E $-\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Oppgave 6. (3 poeng). Integralet

$$\int_0^1 x \ln(1+x)\, dx \quad \text{er}$$

A $-1/4$

B $3\ln(2)$

C $\ln(2) - 3/4$

D 0

✓**E** $1/4$

Oppgave 7. (3 poeng). Den andrederiverte til funksjonen

$$f(x) = \int_{-x}^{x} e^{-t^2}\, dt \quad \text{er}$$

A 0

B $e^{-x^2} - e^{x^2}$

C $2xe^{-x^2}$

✓**D** $-4xe^{-x^2}$

E Funksjonen er ikke 2 ganger deriverbar

Oppgave 8. (3 poeng). Volumet til rotasjonslegemet som framkommer ved å rotere området $0 < x < 1$, $0 < y < \sqrt{x}$ om x aksen er

A π

B $3\pi/2$

C 1

D $\pi^2/2$

✓**E** $\pi/2$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 9. (3 poeng). Funksjonen

$$f(x) = (\cos(x) + \sin(x))^2$$

A er konveks

✓**B** har lokale maksimum i $x = (2n + 1)\pi/4$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

C har lokale minimum i $x = (2n + 1)\pi/4$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

D er avtagende

E er voksende

Oppgave 10. (3 poeng). Følgen gitt ved $a_0 = 0$,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2} \quad \text{for } n > 0, \text{ er konvergent.}$$

Da blir grensen $\lim_{n\to\infty} a_n$ lik

A 0

B $\sqrt{2}$

C -1

D $\sqrt{5} - 1$

✓**E** 1

Del 2

Oppgave 11.

a) (10 poeng). Regn ut det ubestemte integralet

$$\int \frac{dx}{e^{2x} - 1}$$

Løsningsforslag: Vi substituerer $u = e^{2x}$, $x = \ln(u)/2$, $dx = 1/(2u)\,du$.

$$\begin{aligned} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u(u-1)} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln(u-1) - \ln(u)\right) + C \\ &= \frac{1}{2}\left(\ln\left(e^{2x} - 1\right) - 2x\right) + C. \end{aligned}$$

b) (10 poeng). La p være et tall større enn 1, og la A være området i (x, y) planet gitt ved $0 < x < 1$, $x^p < y < x^{1/p}$. Hva blir volumet av omdreiningslegemet som framkommer ved å rotere A om y-aksen?

(Fortsettes på side 5.)

Løsningsforslag: Volumet blir

$$2\pi\int_0^1 x\left(x^{1/p}-x^p\right)\,dx = 2\pi\int_0^1 x^{1+1/p}-x^{p+1}\,dx$$
$$= 2\pi\left(\frac{1}{\frac{1}{p}+2}-\frac{1}{p+2}\right)$$
$$= 2\pi\frac{p^2-1}{(2p+1)(p+2)}$$

c) (10 poeng) Avgjør om det uegentlige integralet

$$\int_0^1 \ln(x)\arctan(x)\,dx \quad \text{konvergerer.}$$

Løsningsforslag: For å bruke grensesammenligningstesten (slik vi har lært den) gjør vi et variabelskifte $x = e^{-u}$, $dx = -e^{-u}\,du$. Da får vi at

$$\int_0^1 \ln(x)\arctan(x)\,dx = -\int_0^\infty u\arctan\left(e^{-u}\right)\,du.$$

Nå kan vi bruke grensesammenligning, sett $g(u) = ue^{-u}$, vi vet at $\int_0^\infty g(u)du$ konvergerer. Vi får at (ved L'Hopital)

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u\arctan(e^{-u})}{ue^{-u}} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to\infty}\frac{\frac{e^{-u}}{1+e^{-2u}}}{e^{-u}}$$
$$= 1.$$

Altså *konvergerer* det uegentlige integralet.
Et alternativ her vil være å observere at integranden $\ln(x)\arctan(x)$ er kontinuerlig i $[0,1]$. Derfor konvergerer integralet.

Oppgave 12.

a) (10 poeng). La A være 2×2 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},$$

der a, b og c er reelle tall hvor $c \neq 0$. Finn b uttrykt ved a og c slik at $A^2 = I_2$.

Løsningsforslag: Vi får at

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & bc+a^2 \end{pmatrix} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Derfor må $a^2 + bc = 1$, altså $b = (1-a^2)/c$.

(Fortsettes på side 6.)

b) (10 poeng). Sett $a = 2$, $c = 1$, og la b være det du fant i forrige deloppgave. (Hvis du ikke løste denne, la b være ubestemt.) Regn ut

$$A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 + A^8.$$

Løsningsforslag: Siden $A^2 = I$ får vi at

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 + A^8 &= A + I + A + I + A + I + A + I \\ &= 4(A+I) = 4\left(\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hvis b ikke ble funnet, så skal -12 erstattes med $4b$.

Oppgave 13.

a) (10 poeng). Finn det ubestemte integralet

$$\int \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,dx.$$

Løsningsforslag: For å finne en antiderivert, bruker vi delvisintegrasjon på det første leddet i integranden,

$$\begin{aligned} \int \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \int \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx - \int \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx \\ &= x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

b) (10 poeng). Regn ut det uegentlige integralet

$$\int_0^\infty \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)\,dx.$$

Løsningsforslag: Vi har at

$$\int_0^\infty \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\,dx = \lim_{b\to\infty} b\sin\left(\frac{1}{b}\right) - \lim_{a\to 0^+} a\sin\left(\frac{1}{a}\right).$$

Grensen i 0 blir null, siden sinus tar verdier mellom -1 og 1. For å regne den andre grensen bruker vi L'Hopital

$$\lim_{b\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{b}} = \lim_{b\to\infty} \frac{\frac{-1}{b^2}\cos\left(\frac{1}{b}\right)}{\frac{-1}{b^2}} = \lim_{b\to\infty} \cos\left(\frac{1}{b}\right) = 1.$$

Derfor blir svaret 1.

SLUTT