Kortfattet løsningsforslag til kontinuasjonseksamen i MAT1100, H-11

DEL 1

Oppgave 1. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = ye^{-xy^2}$, er $\frac{\partial f}{\partial y}$ lik:

A) $-y^3e^{-xy^2}$
B) $-2xy^2e^{-xy^2}$
C) $e^{-xy^2} - ye^{-xy^2}$
D) $e^{-xy^2} - 2xy^2e^{-xy^2}$
E) $e^{-xy^2} - xye^{-xy^2}$

Riktig svar: D) $e^{-xy^2} - 2xy^2e^{-xy^2}$

Oppgave 2. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = x^2y + y^3$, så er den dobbeltderiverte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ lik:

A) $2x$
B) $2x + 3y^2$
C) 0
D) $2xy + 3y^2$
E) 2

Riktig svar: A) $2x$

Oppgave 3. (3 poeng) Hvis $f(x,y) = \arctan(xy^2)$, så er den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$, der $\mathbf{a} = (1,1)$ og $\mathbf{r} = (-1,2)$, lik:

A) $\frac{3}{2}$
B) $\frac{7}{2}$
C) 1
D) 0
E) $\frac{5}{2}$

Riktig svar: A) $\frac{3}{2}$

Oppgave 4. (3 poeng) Den rette linjen gjennom punktene $(0,1,-1,2)$ og $(1,1,-1,3)$ har parametriseringen:

A) $\mathbf{r}(t) = (t, 1+t, -1-t, 2+3t)$
B) $\mathbf{r}(t) = (t, 1-t, -1+t, 2-3t)$
C) $\mathbf{r}(t) = (t, 1, -1, 2+t)$

D) $\mathbf{r}(t) = (t, 1, -1, 2 + 3t)$
E) $\mathbf{r}(t) = (1, 1 + t, -1 - t, 3 + 2t)$

Riktig svar: C) $\mathbf{r}(t) = (t, 1, -1, 2 + t)$

Oppgave 5. (3 poeng) Hvis en trekant er utspent av vektorene $(1, 3, -2)$ og $(1, -1, -2)$, så er arealet:

A) $\frac{5}{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) $\frac{7}{2}$
D) 3
E) $2\sqrt{5}$

Riktig svar: E) $2\sqrt{5}$

Oppgave 6. (3 poeng) Den deriverte til $f(x) = \arcsin\sqrt{x}$ er lik:

A) $\frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$
B) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
C) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$
D) $\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
E) $-\frac{1}{2\sqrt{x}\sin^2(\sqrt{x})}$

Riktig svar: C) $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$

Oppgave 7. (3 poeng) Når du skal delbrøkoppspalte $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^5-1}{(x+1)^2(x^2+2x+2)}$, må du først:

A) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
B) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}$
C) polynomdividere
D) finne konstanter A, B, C, D slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$
E) finne konstanter A, B, C slik at $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x^2+2x+2}$

Riktig svar: C) polynomdividere

Oppgave 8. (3 poeng) Dersom $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ og $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, så er BA lik:

A) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -10 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 8 \\ 0 & 11 & 3 \end{pmatrix}$

C) dimensjonene stemmer ikke, så produktet er udefinert.

D) $\begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ 8 & -1 & 7 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 11 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Riktig svar: E) $\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 6 & 11 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$

Oppgave 9. (3 poeng) Hvis $f(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t^2+9}}\, dt$, så er $f'(2)$ lik:

A) $\frac{1}{5}$
B) $\frac{4}{\sqrt{13}}$
C) $\frac{1}{\sqrt{13}}$
D) $\frac{4}{3}$
E) $\frac{4}{5}$

Riktig svar: E) $\frac{4}{5}$

Oppgave 10. (3 poeng) Det uegentlige integralet $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx$

A) divergerer
B) er lik π
C) er lik $\ln 8$
D) er lik $10 \ln 2$
E) er lik $-\ln(\ln 2)$

Riktig svar: A) divergerer

DEL 2

Oppgave 11. (10 poeng) Finn grenseverdien

$$\lim_{x \to \infty} x \ln\left(1 + \frac{a}{x}\right)$$

der a er et reelt tall.

Løsning:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{a}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{a}{x}}\cdot\left(-\frac{a}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = a$$

Oppgave 12. (10 poeng) Funksjonen

$$f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$$

er definert for $x \neq 0$. Regn ut gradienten $\nabla f(x,y)$. I hvilken retning vokser funksjonen raskest i punktet $\mathbf{a} = (x,y)$? I hvilke retninger er den retningsderiverte lik 0 i dette punktet?

Løsning: Siden

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

og

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

er

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)$$

Dette betyr at funksjonen vokser raskest i retningen $(-y,x)$ (normalt på stedsvektoren $\mathbf{a} = (x,y)$). Stigningen er null i retninger normalt på gradienten, dvs. i retningene $\pm(x,y)$.

Oppgave 13. (10 poeng) Finn en 2×2-matrise M slik at

$$M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$$

Løsning: Hvis vi setter $M = \begin{pmatrix}x & y\\ u & v\end{pmatrix}$, får vi ligningene

$$\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\u+v\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = M\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x-y\\u-v\end{pmatrix}$$

Løser vi ligningene $x+y=4$ og $x-y=2$, får vi $x=3, y=1$, og løser vi ligningene $u+v=1, u-v=-3$, får vi $u=-1, v=2$. Dermed er

$$M = \begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Oppgave 14. (10 poeng) Vis at funksjonen $f(x) = x^3 + 2x + 4$ er injektiv og har en omvendt funksjon g. Finn $g'(4)$.

Løsningsforslag: Siden $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ for alle x, er funksjonen strengt voksende og dermed injektiv. Følgelig har den en omvendt funksjon g. Vi ser at $f(0) = 4$, og dermed er

$$g'(4) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Oppgave 15. (10 poeng) Området under grafen til funksjonen $f(x) = \arctan x$, $0 \le x \le 1$, dreies om y-aksen. Finn volumet til omdreiningslegemet.

Løsningsforslag: Ifølge formelen for volumet til et omdreiningslegeme om y-aksen er $V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx$. Bruker vi delvis integrasjon med $u = \arctan x$, $v' = x$, får vi $u' = \frac{1}{1+x^2}$ og $v = \frac{x^2}{2}$. Dermed er

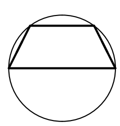
$$\int_0^1 x \arctan x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \arctan x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1}{1+x^2}\, dx + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Dette betyr at

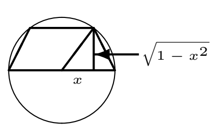
$$V = 2\pi \int_0^1 x \arctan x \, dx = \frac{\pi^2}{2} - \pi$$

Oppgave 16. (10 poeng) Figuren viser et trapes innskrevet i en sirkel med radius 1. Grunnlinjen til trapeset er diameter i sirkelen. Hva er det største arealet trapeset kan ha?



Løsningsforslag: Lar vi x være som i figuren nedenfor, blir høyden i trapeset $h = \sqrt{1-x^2}$ og lengden av topplinjen blir $b = 2x$. Siden grunnlinjen er $a = 2$, blir dermed arealet

$$A(x) = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{2+2x}{2} \cdot \sqrt{1-x^2} = (1+x)\sqrt{1-x^2}$$



Derivasjon gir

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{1-x^2} + (1+x) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1 - x^2 - (1+x)x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(-2x^2 - x + 1)$$

Løser vi annengradsligningen $2x^2 + x - 1 = 0$, får vi $x = \frac{1}{2}$ og $x = -1$. Den negative løsningen må forkastes, og vi ser (f.eks. ved å bruke fortegnsskjema) at $x = \frac{1}{2}$ gir et maksimumspunkt for funksjonen $A(x)$. Det maksimale arealet er dermed

$$A(\frac{1}{2}) = (1 + \frac{1}{2})\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Oppgave 17. (10 poeng) Anta at $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon med $f(0) = 0$. Vis at dersom f er deriverbar i 0, finnes det en kontinuerlig funksjon $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = xg(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

Løsningsforslag: Vi definerer en funksjon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{for } x \neq 0 \\ & \\ f'(0) & \text{for } x = 0 \end{cases}$$

For $x \neq 0$ har vi åpenbart $f(x) = xg(x)$, og denne relasjonen holder også for $x = 0$ siden begge sider da er 0. Det er derfor nok å vise at g er kontinuerlig. Siden $f(x)$ er kontinuerlig, og $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, er $g(x)$ kontinuerlig for $x \neq 0$ (en brøk av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlig der nevneren er forskjellig fra 0). For å vise at g er kontinuerlig i 0, observerer vi at

$$g(0) = f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} g(x)$$

der vi har brukt at $f(0) = 0$.

SLUTT