LØSNINGSFORSLAG MAT1100 UTSATT 17.1.20

1

$$f(x,y,z) = e^{z^2}\cot(xy^3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -y^3 e^{z^2}\frac{1}{\sin^2(xy^3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = -3xy^2 e^{z^2}\frac{1}{\sin^2(xy^3)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2z e^{z^2}\cot(xy^3)$$

2

$$f(x,y) = \sin(x^3y) + y\ln(x^2)$$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(3x^2y\cos(x^3y) + 2xy\frac{1}{x^2},\ x^3\cos(x^3y) + \ln(x^2)\right)$$

$$= \left(3x^2y\cos(x^3y) + 2\frac{y}{x},\ x^3\cos(x^3y) + 2\ln x\right)$$

$$\nabla f\left(1,\frac{\pi}{3}\right) = \left(3\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{3} + 2\cdot 0\right)$$

$$= \left(\frac{7\pi}{6},\ \frac{1}{2}\right)$$

Stigningstallet i retningen i $(1,\frac{\pi}{3})$ der f vokser raskest er

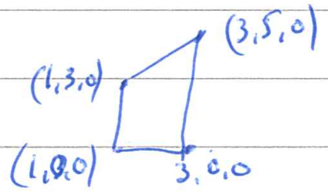
$$\left|\nabla f\left(1,\frac{\pi}{3}\right)\right| = \sqrt{\frac{49\pi^2}{36} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{49\pi^2+9}}{6}$$

(3) Pyramiden med firkantet grunnflate med hjørner i (1,0,0), (3,0,0), (1,3,0) og (3,5,0) og toppunkt (2,2,4) har volum

$$V = \frac{1}{3} G h \quad \text{der høyden } h = 4$$

og arealet G av grunnflaten, som er et trapes er

$$G = \frac{1}{2}\Big(\big|(1,3,0)-(1,0,0)\big| + \big|(3,5,0)-(3,0,0)\big|\Big)\cdot\big|(3,0,0)-(1,0,0)\big|$$



$$= \frac{1}{2}\cdot(3+5)\cdot 2 = 8,$$

så $\underline{\underline{V}} = \frac{1}{3}\cdot 8\cdot 4 = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$

(4)

a) $$\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xy} \\ x^2 z \\ z\cos yz \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} & 0 \\ 2xz & 0 & x^2 \\ 0 & -z^2\sin yz & \cos yz - yz\cos yz \end{pmatrix}$$

b) $$\vec{F}'(\pi,0,0) = \begin{pmatrix} 0\cdot e^{\pi\cdot 0} & \pi e^{\pi\cdot 0} & 0 \\ 2\pi\cdot 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0\sin 0 & \cos 0 - 0\cos 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4b fortsettelse

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^3 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^3 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \pi^3 \\ 0 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(5)

$$\frac{\arctan x}{2x^{3/4}-1} > \frac{1}{2x^{3/4}} > 0 \quad \text{når } x > 5$$

og $$\int_1^\infty \frac{1}{2x^{3/4}}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{a\to\infty}\left[4x^{\frac{1}{4}}\right]_1^a = \infty$$

så $$\underline{\int_1^\infty \frac{\arctan x}{2x^{3/4}-1}\,dx} \quad \underline{\text{divergerer}} \; !$$

(6) $a_1 = 2 \qquad a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} \qquad n \geq 1$

a) $a_1 = 2$ og $a_n < 4 \Rightarrow a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} < 2\sqrt{4} = 4$
så ved induksjon er $\underline{a_n < 4}$ for $n \geq 1$.

$a_2 = 2\sqrt{2} > a_1 = 2$, og $a_{n+1} > a_n \Rightarrow \sqrt{a_{n+1}} > \sqrt{a_n}$

$\Rightarrow 2\sqrt{a_{n+1}} > 2\sqrt{a_n} \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1} \qquad n \geq 1$

./.

så ved induksjon er

$a_{n+1} > a_n$ for hver $n \geq 1$

6b Av 6a er $\{a_n\}$ begrenset $(a_n < 4)$

og monoton $(a_{n+1} > a_n)$ så

følgen konvergerer.

La $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, da er

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 2\sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

$$a = 2\sqrt{a} \Rightarrow \underline{a = 4}$$

$\underline{\{a_n\} \text{ konvergerer mot } a = 4}$

7 a Kvadratrøtter til i og $2+2i\sqrt{3}$

$$z^2 = i = e^{\frac{\pi}{2}i} \Rightarrow z = e^{\frac{\pi}{4}i} \text{ eller } z = e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$z = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{2} \qquad z = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \tfrac{i}{2}\sqrt{2}$$

$$z^2 = 2+2i\sqrt{3} = 4e^{i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ eller } z = 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$z = \sqrt{3} + i \text{ eller } z = -\sqrt{3} - i$$

7b

Hvis z_1, z_2 er kvadratrøtter til $2+2i\sqrt{3}$

så er $P(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_2)(z - \bar{z}_2)$

et reelt polynom av grad fire med z_1 og z_2

som to av røttene.

Så $P(z) = (z - \sqrt{3} - i)(z - \sqrt{3} + i)(z + \sqrt{3} + i)(z + \sqrt{3} - i)$

$= (z^2 - 2\sqrt{3}z + 3 + 1)(z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 + 1)$

$= \underline{z^4 - 4z^2 + 16}$ har kvadratrøttene til $2+2i\sqrt{3}$ som røtter.

8.

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, kontinuerlig på $(0,1)$ men ikke integrerbar på $[0,1]$.

$$\lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to 0} \left[\ln x\right]_a^1 = \lim_{a \to 0} (-\ln a) = \infty,$$

så $f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0 \\ \frac{1}{x} & x \in (0,1] \end{cases}$

er kontinuerlig på $(0,1)$, men ikke integrerbar på $[0,1]$.