UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Onsdag 13. juni 2007.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1:
a) Finn de stasjonære (kritiske) punktene til $f(x, y) = 2x^2y + 4xy - y^2$.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksimumspunkt, lokale minimumspunkt eller sadelpunkt.

Oppgave 2:
a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.4 \\ 0.2 & 1.1 \end{pmatrix}$$

b) En storby og de omliggende områdene vokser kraftig. Man regner at dersom det bor x_n millioner i byen og y_n millioner i de omliggende områdene ett tiår, vil de tilsvarende tallene ti år senere være

$$x_{n+1} = 0.9x_n + 0.4y_n$$

$$y_{n+1} = 0.2x_n + 1.1y_n$$

Dersom det i år bor $x_0 = 6$ millioner i byen og $y_0 = 3$ millioner i områdene omkring, hvor mange vil det da bo i byen og de omliggende områdene om n tiår?

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3:
a) Finn konvergensområdet til rekken $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

b) Finn summen til rekken.

Oppgave 4: R er rektangelet med hjørner i $(1,1)$, $(3,1)$, $(3,2)$, $(1,2)$, og $\mathcal{C}$ er omkretsen til R orientert mot klokken. Finn $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x,y) = (xy^2 - y)\,\mathbf{i} + (x^2y + x)\,\mathbf{j}$$

Oppgave 5:
a) Vis at volumet til omådet avgrenset av planet $2x + 4y - z = -4$ og paraboloiden $z = x^2 + y^2$ er gitt ved

$$V = \iint_D \left(2x + 4y - x^2 - y^2 + 4\right)\, dA$$

der D er sirkelen med sentrum i $(1,2)$ og radius 3.

b) Regn ut V.

Oppgave 6: En $n \times n$-matrise A kalles *radstokastisk* dersom alle elementene er positive og summen av hver rad er 1, altså dersom

(i) $a_{ij} \geq 0$ for alle i, j

(ii) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = 1$ for alle i

Vis at dersom A er radstokastisk, så er

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

en egenvektor for A. Hva er egenverdien?

Vi skal nå vise at dersom λ er en (annen) egenverdi for A, så er $|\lambda| \leq 1$. Velg en tilhørende egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Dersom v_i er komponenten med størst tallverdi, forklar at

$$|\lambda||v_i| = |\lambda v_i| = |\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_j| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} |v_i| = |v_i|$$

(du må forklare hvert steg i utregningen). Forklar også at dette viser at $|\lambda| \leq 1$.

SLUTT