UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	11. juni 2010.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator, vedlagt formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

*Du må begrunne alle svar, og vise nok mellomregninger
til at man lett kan følge argumentene dine.*

Oppgave 1

1a

La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Transformér A til redusert trappeform.

1b

Er vektorene

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

lineært uavhengige?

(Fortsettes på side 2.)

1c

Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2y + z &= 1 \\ 3y + z &= 2 \\ x + 4y &= 3. \end{aligned}$$

Oppgave 2

Definér funksjonen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved at

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{for } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2a

Finn

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ og } \frac{\partial f}{\partial y}$$

der de eksisterer.

2b

Finn verdien av f langs linja $y = ax$, der a er et fast tall. Avgjør om f er kontinuerlig i origo.

2c

Finn maksimumsverdien og minimumsverdien til f.

2d

Finn volumet til legmet avgrenset av den delen av (x,y) planet der x og y er positive, grafen til f, og sylinderen $x^2 + y^2 \leq 1$.

Oppgave 3

La

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n,$$

der rekka konvergerer.

(Fortsettes på side 3.)

3a

Finn konvergensområdet til rekka.

3b

For x med i konvergensintervallet til rekka, finn

$$f(x) = \int_0^x \frac{g(y)}{y}\, dy.$$

3c

Finn $g(x)$.

Oppgave 4

Finn den minste avstanden fra flaten gitt ved $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ til punktet $(x, y, z) = (1, 2, 0)$.

Oppgave 5

Betrakt avbildningen fra "ellipsoidekoordinater" (ϕ, θ, ρ) til Kartesiske koordinater (x, y, z), gitt ved

$$x = a\rho \sin(\phi)\cos(\theta), \quad y = b\rho \sin(\phi)\sin(\theta), \quad z = c\rho\cos(\phi),$$

der a, b og c er faste positive tall, og $\phi \in [0, \pi]$, $\theta \in [0, 2\pi]$ og $\rho \geq 0$.

5a

Finn Jacobideterminanten til denne avbildningen, mao. $\partial(x, y, z)/\partial(\phi, \theta, \rho)$.

5b

La D være mengden gitt ved

$$D = \left\{ (x, y, z) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Regn ut integralet

$$\iiint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz.$$