UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Fredag 13. juni 2014.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (1a, 1b, 2a, 2b, 3 osv.) teller 10 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

med redusert trappeform

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Angi antallet lineært uavhengige søyler i A, og finn alle løsninger til ligningssettet

$x + 3y + 2z + 2w = 0$

$2x + y + 2z - 3w = 0$

$x + y + z - w = 0$

$2x + y + z - 4w = 0$

b) Skriv en av søylene i A som en lineærkombinasjon av de andre.

Oppgave 2 La S være mengden

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

og la f være funksjonen $f(x, y, z) = xz - y^2$. Bruk Lagrange til å finne maksimums- og minimumspunktene til f på S.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3
La C være matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 7/6 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til matrisen C.

b) La $\mathbf{w} = (3, 0)$. Finn grensen $\lim_{n\to\infty} C^n\mathbf{w}$.

Oppgave 4 La $f(x, y) = x^2y + yx + y^2$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er lokale maksima, minima, eller sadelpunkter.

Oppgave 5 Avgjør om rekkene $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n)!}$ og $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n^2+7n}{2n^3+n}$ konvergerer eller divergerer.

Oppgave 6 La $f(x, y, z)$ være funksjonen

$$f(x, y, z) = z + x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1$$

og la Z betegne mengden av punkter (x, y, z) slik at $f(x, y, z) = 0$.

a) Mengden av punkter der Z skjærer (x, y)-planet er et kjeglesnitt. Beskriv dette.

b) La nå S være den begrensete mengden i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av (x, y)-planet og Z. Finn

$$\int\int\int_S z\,dx\,dy\,dz.$$

SLUTT