UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra.
Eksamensdag:	Onsdag 10. juni 2015.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Formelark.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle deloppgaver (Oppgave 1a, 1b, 2, 3a, 3b osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1. I denne oppgaven er $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funksjonen

$$f(x,y) = 2x^2y + 2xy + y^2$$

a) (10 poeng) Finn de stasjonære punktene til f.

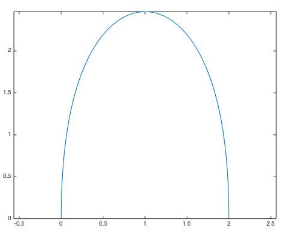
b) (10 poeng) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter eller lokale maksimumspunkter.

Oppgave 2. (10 poeng) Finn konvergensområdet til rekken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n2^n}$$

Oppgave 3. Figuren viser et MATLAB-plot av en kurve $\mathcal{C}$ med parametrisering

$$\mathbf{r}(t) = (1+\cos t)\,\mathbf{i} + t(\pi - t)\,\mathbf{j}\,, \quad \text{der } t \in [0,\pi]$$



a) (10 poeng) Forklar at arealet A til området mellom kurven og x-aksen er gitt ved

$$A = \int_{\mathcal{C}} x\,dy + \int_{\mathcal{D}} x\,dy$$

der $\mathcal{D}$ er linjestykket fra $(0,0)$ til $(2,0)$.

b) (10 poeng) Regn ut A.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4. I denne oppgaven er V volumet til området avgrenset av de to paraboloidene

$$z = x^2 + 2x + y^2 - 4y$$
$$z = 6 - x^2 - 2x - y^2 - 4y$$

a) (10 poeng) Forklar at

$$V = 2\iint_D (3 - x^2 - y^2 - 2x)\, dxdy$$

der D er et område i xy-planet. Hvilket område er D?

b) (10 poeng) Regn ut V.

Oppgave 5. I denne oppgaven kan du uten bevis bruke følgende konsekvens av spektralteoremet: Dersom $\mathbf{v}_1$ er en egenvektor til en symmetrisk $n \times n$-matrise A, så finnes det en ortogonal basis av egenvektorer $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ til A som inneholder $\mathbf{v}_1$ (en basis er *ortogonal* dersom vektorene står normalt på hverandre).

I hele oppgaven er A_n den $n \times n$-matrisen der alle elementene er 1, dvs.

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a) (10 poeng) Vis at

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en egenvektor til A_n. Hva er egenverdien? Vis også at alle ikke-null vektorer som står normalt på $\mathbf{v}_1$, er egenvektorer. Hvor mange forskjellige egenverdier har A_n, og hvilken multiplisitet har de?

b) (10 poeng) Finn en ortogonal basis med egenvektorer til A_3.

c) (10 poeng) For hvert reelt tall a er $A_n(a)$ matrisen

$$A_n(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & a \end{pmatrix} = (a-1)I_n + A_n$$

Vis at egenvektorene til A_n også er egenvektorer til $A_n(a)$. Hva er egenverdiene til $A_n(a)$, og hvilken multiplisitet har de?

SLUTT