UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 29. mai 2019.
Tid for eksamen:	14:30 – 18:30.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 4/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 24 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0$.

Oppgave 2.

a) Finn volumet avgrenset av paraboloidene $z = 4-x^2-y^2$ og $z = 2+x^2+y^2$.

b) Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 - xy^2\right) dy$ der $\mathcal{C}$ er enhetssirkelen $x^2 + y^2 = 1$ orientert mot klokka.

Oppgave 3. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 20 & 1 \\ 4 & 3 & 18 & 1 \\ 2 & 3 & 12 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Regn ut den reduserte trappeformen til A, og skriv ned tre søyler fra A som er lineært uavhengige.

b) Finn en basis for $\mathbb{R}^4$, der de tre lineært uavhengige søylene du kom fram til i a) inngår.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 4.
Hva blir konvergensområdet for rekken $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{n}$? Finn også et uttrykk for $S(x)$ der rekken konvergerer.

Oppgave 5. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x, y) = x^2 e^x + (3y^2 - 6y)e^x + 1.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.

c) Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å vise at lokale ekstremalpunkter for f under betingelsen $y = 3 - 2x$ må være skjæringspunkter mellom linjen $y = 3 - 2x$ og ellipsen $\frac{(x+1)^2}{4^2} + \frac{(y-3)^2}{(4/\sqrt{3})^2} = 1$. Forklar videre hvorfor f må ha et globalt minimum under denne betingelsen (du trenger ikke skrive opp selve minimumspunktet). Har f et globalt maksimum under den samme betingelsen?
Hint: Verifiser at $f(1, 1) < 1$, og at $\lim_{x\to\infty} f(x, 3 - 2x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x, 3 - 2x) = 1$. Dette kan brukes til å vise at f må ha et globalt minimum under den gitte betingelsen.

Lykke til!