UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 31. mai 2024.
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til A.

b) Skriv vektoren $\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ som en sum av egenvektorer, og regn ut grenseverdien $\lim_{n\to\infty} A^n \boldsymbol{x}_0$.

Oppgave 2. I denne oppgaven skal vi se på rekka $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+2}$.

a) Finn konvergensområdet for rekka.

b) Finn et uttrykk for summen av rekka i konvergensområdet.

Oppgave 3.

a) La $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Regn ut integralet $\int\int_D \frac{1}{1+x^2+y^2} dxdy$.

b) Finn arealet til den delen av flaten definert ved $z = 9 - x^2 - y^2$ som ligger over xy-planet.

Oppgave 4. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-x}.$$

a) Finn alle stasjonære punkter for f.

(Fortsettes på side 2.)

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.

Oppgave 5. Vi ser på funksjonen $f(x, y, z) = x^3 + xy - z^2 - 2$. Forklar at det finnes en deriverbar funksjon $g(x, y)$ definert i en omegn U om $(1, 2)$ slik at $g(1, 2) = 1$, og slik at $f(x, y, g(x, y)) = 0$ for $(x, y) \in U$. Hva blir $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 2)$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 2)$?

Oppgave 6. Finn maksimum og minimum for funksjonen $f(x, y) = x^2+y^2$ under betingelsen $x^2 + xy + y^2 = 3$.
Hint: Det kan være nyttig å spesialbehandle tilfellene der enten x eller y er lik 0. Det kan kanskje være til hjelp for deg å eliminere λ først.

Lykke til!