# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Deleksamen i: | MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra |
| Eksamensdag: | Fredag 27. mars 2015 |
| Tid for eksamen: | 15.00 – 17.00 |
| Oppgavesettet er på 5 sider. | |
| Vedlegg: | Svarark, formelsamling. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen består av 15 spørsmål. De 10 første teller 3 poeng hver, mens de 5 siste teller 4 poeng hver slik at den totale poengsummen er 50. Det er bare ett riktig alternativ på hvert spørsmål. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på et spørsmål, får du 0 poeng. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette. Svarene fører du inn på eget svarark. Krysser du av mer enn ett alternativ på et spørsmål, får du 0 poeng.

**Oppgave 1.** (3 poeng) En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + t^4\,\mathbf{j}$. Akselerasjonen $\mathbf{a}(t)$ er lik:

A) $-\sin t\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j}$
B) $-t^4\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$
C) $\sqrt{\cos^2 t + 144t^4}$
D) $-\cos t\,\mathbf{i} + 12t^2\,\mathbf{j}$
E) $-\cos t\,\mathbf{i} + \frac{t^6}{30}\,\mathbf{j}$

**Oppgave 2.** (3 poeng) En parametrisert kurve $\mathcal{C}$ er gitt ved $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hvis $f(x,y) = x^2y$, så er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ lik:

A) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\cos^2 t + 4t^2}\,dt$

B) $x^2y \int_0^{2\pi} (\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$

C) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,\sqrt{\sin^2 t + t^4}\,dt$

D) $\int_0^{2\pi} t^2 \sin^2 t\,(\cos t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j})\,dt$

E) $x^2y \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + t^4}\,dt$

*(Fortsettes på side 2.)*

**Oppgave 3.** (3 poeng) $\mathcal{C}$ er sirkelen parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hva er $\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$ når $\phi(x, y) = e^{\sin xy}$?

A) $\pi$
B) $0$
C) $\frac{1}{2}$
D) $2\pi$
E) $\frac{\pi}{2}$

**Oppgave 4.** (3 poeng) Hvilket kjeglesnitt fremstiller ligningen $-4x^2 + y^2 + 16x + 2y = 19$?

A) Ellipsen med sentrum i $(1, -2)$ og halvakser $a = 2$, $b = 3$.
B) Hyperbelen med sentrum i $(2, 1)$ og asymptoter $y - 1 = \pm 4(x - 2)$.
C) Hyperbelen med sentrum i $(1, -2)$ og asymptoter $y + 2 = \pm\frac{3}{2}(x - 1)$.
D) Hyperbelen med sentrum i $(2, -1)$ og asymptoter $y + 1 = \pm 2(x - 2)$.
E) Ellipsen med sentrum i $(2, 2)$ og halvakser $a = 1$, $b = 2$

**Oppgave 5.** (3 poeng) Hvilken av matrisene er *ikke* på redusert trappeform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A) $A$
B) $B$
C) $C$
D) $D$
E) $E$

**Oppgave 6.** (3 poeng) Hvis $\mathbf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er lineæravbildningen slik at $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{T}(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, så er matrisen til $\mathbf{T}$ lik:

A) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
B) $\begin{pmatrix} 4 & -\frac{1}{2} \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$
C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$
E) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

*(Fortsettes på side 3.)*

**Oppgave 7.** (3 poeng) $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ er deriverbare funksjoner slik at $\mathbf{G}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$,

$$\mathbf{F}'(\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{G}'(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Hvis $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$, så er $\mathbf{H}'(\mathbf{a})$ lik:

A) $\begin{pmatrix} 9 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -7 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 7 & -5 & 7 \\ -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}$

**Oppgave 8.** (3 poeng) Den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hva er den generelle løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 2 \\ x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

A) $z$ kan velges fritt, men da er $y = z$ og $x = -z$
B) $x = -1, y = 1, z = 1$
C) $y$ og $z$ kan velges fritt, $x = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z$
D) $x = 2, y = -1, z = -1$
E) Systemet har ingen løsning.

**Oppgave 9.** (3 poeng) $A$ er området i første kvadrant avgrenset av sirklene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 = 4$. Da er $\iint_A (x + y^2)\, dxdy$ lik:

A) $\int_1^4 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
B) $\int_1^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
C) $\int_0^2 \left[\int_0^{\pi} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
D) $\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r^2\cos\theta + r^3\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$
E) $\int_1^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(r\cos\theta + r^2\sin^2\theta\right)\, d\theta\right]\, dr$

*(Fortsettes på side 4.)*

**Oppgave 10.** (3 poeng) Når vi skifter integrasjonsrekkefølge i integralet

$$\int_0^1 \left[ \int_{2x}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right] dx\,,$$

får vi:

A) $\int_0^2 \left[ \int_{\frac{y^2}{4}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx \right] dy$

B) $\int_0^1 \left[ \int_{2y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right] dy$

C) $\int_0^1 \left[ \int_{\frac{y}{2}}^{\frac{y^2}{4}} f(x,y)\,dx \right] dy$

D) $\int_0^2 \left[ \int_{2y}^{2\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right] dy$

E) $\int_0^1 \left[ \int_0^2 f(x,y)\,dx \right] dy$

**Oppgave 11.** (4 poeng) Hvis $R = [0,1] \times [0,2]$, så er $\iint_R x^2y\,dxdy$ lik:

A) $\frac{3}{4}$

B) 1

C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

**Oppgave 12.** (4 poeng) Hvis $\mathcal{C}$ er den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + t^3\,\mathbf{j}$, $t \in [0,1]$, og $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\,\mathbf{i} + (x^3+y^2)\,\mathbf{j}$, så er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

A) $\frac{8}{9}$

B) 1

C) $\frac{11}{9}$

D) $\frac{7}{8}$

E) $\frac{5}{6}$

*(Fortsettes på side 5.)*

**Oppgave 13.** (4 poeng): $\mathcal{C}$ er den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = 3\cos t\,\mathbf{i} + 3\sin t\,\mathbf{j}$, der $t \in [0, 2\pi]$. Hva er

$$\int_{\mathcal{C}} (-y + e^{\sin^2 x})\, dx + (x + \sin(e^{y^2}))\, dy\ ?$$

A) $1 + \sin(e^{4\pi^2})$
B) $e^{4\pi^2}$
C) $0$
D) $2\pi$
E) $18\pi$

**Oppgave 14.** (4 poeng): Volumet til området avgrenset av paraboloiden $z = x^2 + y^2 + x - 2y$ og planet $z = x - 2y + 4$ er:
A) $4$
B) $\pi^2$
C) $8\pi$
D) $6\pi$
E) $\frac{25}{3}\pi$

**Oppgave 15.** (4 poeng) Arealet til området i første kvadrant avgrenset av kurvene $y = x$, $y = 3x$, $y = \frac{1}{x}$ og $y = \frac{2}{x}$ er:
A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{1}{2}\ln 3$

C) $\frac{2}{3}$

D) $e^{-1}$

E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

LYKKE TIL!