UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i	MAT1110 — Kalkulus og Lineær algebra
Eksamensdag:	Fredag 22. mars 2024.
Tid for eksamen:	09:00 – 11:00.
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelark
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres i Inspera.

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med 1/3 av den endelige karakteren i emnet. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette". *Lykke til!*

Oppgaver

Oppgave 1. Den affine avbildningen $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er definert ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3x + y \\ 3 + 2x + 4y \end{pmatrix}.$$

Vi ser på området $R = \{(x, y) : 1 \leq x, y \leq 3\}$. Arealet til $\mathbf{F}(R)$ blir da

A: 4
B: 40
C: 10
D: 80
E: 60

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2. Funksjonene $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er definert ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x^3 + z^2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^3 \\ x^3 + y^3 \\ x^3 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Vi setter også $\mathbf{H}(x,y) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x,y))$. Jacobimatrisen til $\mathbf{H}(x,y)$ i $(1,-1)$ er da

A: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & 8 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & -8 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 12 & -12 \end{pmatrix}$

Oppgave 3. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ være definert ved

$$\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y \\ x + y \\ x + y^2 \end{pmatrix}.$$

Lineariseringen til $\mathbf{F}$ i punktet $(1,1)$ er da

A: $\begin{pmatrix} 2 + 2x + y \\ 3 + x + y \\ 2 + x + 2y \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} -1 + 2x + y \\ x + y \\ -1 + x + 2y \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 2 + x + 2y \\ x + y \\ 2 + 2x + y \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 2x + 2y \\ 1 + 2x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 1 + x + y \\ 1 + x + y \\ x + y \end{pmatrix}$

Oppgave 4. En kurve i $\mathbb{R}^3$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sin t),\ 0 \le t \le \pi/2.$$

Da er buelengden til kurven

A: $\pi\sqrt{3}$

B: π

C: 2π

D: $\pi\sqrt{2}$

E: $\pi/\sqrt{2}$

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5. En kurve $\mathbf{r}(t)$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3),\ 0 \le t \le 1.$$

Baneakselerasjonen for $\mathbf{r}(t)$ er da

A: $\sqrt{1+4t^2+9t^4}$

B: $2\sqrt{1+9t^2}$

C: $(0, 2, 6t)$

D: $\frac{4t+18t^3}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$

E: $\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}$

Oppgave 6. La $\mathcal{C}$ være kurven i $\mathbb{R}^3$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \left(e^t, 2\sqrt{2}e^t, 4e^t\right),\ 0 \le t \le \ln 2,$$

og la $f(x, y, z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Da blir $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$

A: 75

B: 25

C: $2\ln 2$

D: 1

E: $\frac{75}{2}$

Oppgave 7. La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, x+y+2z)$, og la $\mathcal{C}$ være kurven i $\mathbb{R}^3$ parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-\cos t, \sin t, t^2),\ 0 \le t \le 2\pi.$$

Da er linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik

A: $-2\pi + 16\pi^4$

B: 2π

C: $8\pi^4$

D: -2π

E: 0

Oppgave 8. Vektorfeltet $\mathbf{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2+y+z \\ 3y^2+x+z \\ 3z^2+x+y \end{pmatrix}$

A: er konservativt, og har ingen potensialfunksjon

B: er ikke konservativt, og har en potensialfunksjon

C: er ikke konservativt, og har ingen potensialfunksjon

D: har en entydig potensialfunksjon

E: er konservativt

Oppgave 9. Likningen $4x^2 + 4x + y^2 + 6y + 6 = 0$ beskriver

A: en hyperbel med sentrum $(1/2, 3)$ og asymptoter $y = 3 \pm 2(x - 1/2)$

B: en hyperbel med sentrum $(-1/2, -3)$ og asymptoter $y = -3 \pm 2(x + 1/2)$

C: en ellipse med sentrum $(1/2, 3)$ og halvakser 1 og 2

D: en ellipse med sentrum $(-1/2, -3)$ og halvakser 1 og 2

E: den tomme mengde (ingen punkter tilfredsstiller likningen)

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 10. La $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

A: kan ikke skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$

B: kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ på uendelig mange forskjellige måter

C: kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ved $\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_1$

D: kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ved $\frac{1}{2}\mathbf{v}_2 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_1$

E: kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ved $\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2$

Oppgave 11. La $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 4 & 12 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Hvilken påstand er sann?

A: Søyle 1 og 3 i A er pivotsøyler

B: Søyle 1 og 2 i A er pivotsøyler

C: Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har entydig løsning for alle valg av $\mathbf{b}$

D: Determinanten til A er forskjellig fra 0

E: Søylene til A er lineært uavhengige

Oppgave 12. Determinanten til $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ er

A: -1

B: 1

C: 2

D: 0

E: 3

Oppgave 13. Egenverdiene til matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ er

A: 2 , 3

B: 1, 2, og -3

C: -1, 2, og 3

D: 1, 2

E: 2

Oppgave 14. Matrisen $A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ har

A: egenvektorer $(1, 3)$ og $(4, 1)$

B: ikke to lineært uavhengige egenvektorer

C: egenvektorer $(1, 2)$ og $(2, 1)$

D: egenvektorer $(1, 1)$ og $(7, -2)$

E: egenvektorer $(-1, 1)$ og $(7, 2)$

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 15. Vi ser på likningssystemet

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 2 \\ 4x + 2y + z &= 4 \\ 3x - y - z &= a. \end{aligned}$$

For hvilken verdi av a har systemet løsning(er)?

A: 0

B: 4

C: 2

D: 3

E: Det finnes ingen slik a

Det var det!