UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT1110 — Kalkulus og lineær algebra
Eksamensdag:	Onsdag 14. juni 2017
Tid for eksamen:	15:00 – 19:00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Formelsamling.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

La $\mathcal{C}$ være kurven

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\,\mathbf{i} + t\sin(t)\,\mathbf{j}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}.$$

1a (10 poeng)

Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Forslag til svar: Vi har at

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos(t), \sin(t)) + t(-\sin(t), \cos(t)) \text{ og } \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t(-\sin(t), \cos(t)),$$

som gir at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = t^2$. Da blir integralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{8}{3}\pi^3.$$

1b (10 poeng)

Regn ut arealet av området avgrenset av $\mathcal{C}$ og den rette linja fra $(2\pi, 0)$ til $(0, 0)$.

(Fortsettes på side 2.)

Forslag til svar: Vi har at

$$\text{areal} = \iint_A dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{|\mathbf{r}(t)|} \rho \, d\rho dt = \int_0^{2\pi} \int_0^{t} \rho \, d\rho dt = \frac{4}{3}\pi^3.$$

Oppgave 2

La A være matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2a (10 poeng)

For hvilke $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ har ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entydig løsning $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$?

Forslag til svar: Vi får den reduserte trappeformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 0 & b_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & 2b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & b_1 - 2b_2 + 3b_3 \end{pmatrix}$$

Dersom $b_1 - 2b_2 + 3b_3 = 0$ har vi entydig løsning.

2b (10 poeng)

Sett

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ingen løsning, men vi ønsker vi å finne $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ slik at vi er "nærmest mulig en løsning". Sett

$$f(\mathbf{x}) = |A\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2.$$

Forklar hvorfor f har ett entydig globalt minimum, og finn (x, y) slik at $f(x, y)$ er minimal.

Forslag til svar: Vi har at

$$f(x, y) = (2x + y)^2 + (x + 2y)^2 + (x - 1)^2 = 5x^2 + 4y^2 + 8xy - 2x + 1.$$

(Fortsettes på side 3.)

Ligningen $\nabla f = 0$ blir

$$12x + 8y = 2, \text{ og } 8x + 10y = 0,$$

som har entydig løsning $x = 5/14$, $y = -4/14$. Hessematrisen til f blir

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad \det(Hf) = 120 - 64 = 56 > 0,$$

og $Hf_{1,1} = 12 > 0$ så blir dette et minimum.

Oppgave 3

3a (10 poeng)

Avgjør om denne rekka konvergerer eller divergerer:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln(n)}{n}.$$

Forslag til svar: Dette er en alternerende rekke, som konvergerer hvis det $n$te leddet går mot null. Vi sjekker

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

så rekka konvergerer.

3b (10 poeng)

Finn summen av rekka

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}}.$$

Forslag til svar: Vi har at

$$\frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} x^n \, dx.$$

Derfor har vi at

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi^n}{(n+1)4^{n+1}} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{1-x} \, dx \\ &= \frac{-1}{\pi} \ln(1 - \frac{\pi}{4}) \\ &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{\pi}{4-\pi}\right) \approx 0.49 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 (10 poeng)

Finn det største volumet til kassen med hjørner $(0,0,0)$, $(x,0,0)$, $(0,y,0)$, $(0,0,z)$, $(x,y,0)$, $(x,0,z)$, $(0,y,z)$ og (x,y,z), der $x>0$, $y>0$ og $z>0$, og (x,y,z) ligger på ellipsoiden

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1.$$

Forslag til svar: Vi bruker Lagranges metode med $f(x,y,z)=xyz$ og $g(x,y,z)=x^2+y^2+\frac{z^2}{4}$. Ligningene blir

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda x \\ xz &= 2\lambda y \\ xy &= 2\lambda \frac{z}{4} \end{aligned} \qquad x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1.$$

Vi ser at x, y eller z lik null ikke er noe maksimum, da må $\lambda>0$. Vi deler ligning 2 på ligning 3, og ligning 1 på ligning 2 og får at

$$x^2=y^2=\frac{z^2}{4},$$

som innsatt i den fjerde ligningen gir

$$x=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Dette er det eneste kritiske punktet til f på ellipsoiden, og det må være et maksimum. Volumet blir

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Oppgave 5

5a (10 poeng)

Vis at dersom D er en $n\times n$ diagonalmatrise med ikke-negative tall på diagonalen, så fins det en matrise S slik at $S^2=D$.

Forslag til svar: Hvis det $i$te diagonalelementet i D er a_i^2, sett S lik diagonalmatrisen med a_i på $i$te plass.

5b (10 poeng)

Anta at A er en $n\times n$ matrise med n lineært uavhengige egenvektorer og at alle egenverdiene til A er ikke-negative. Vis at det fins en matrise B slik at $B^2=A$.

(Fortsettes på side 5.)

Forslag til svar: Antagelsene gir at A kan diagonaliseres, la M være matrisen slik at $i$te søyle i M er $i$te egenvektor, og la D være diagonalmatrisen med $i$te egenverdi på $i$te plass. Da er

$$\begin{aligned} A &= MDM^{-1} \\ &= MZ^2M^{-1}, \qquad \text{siden } D \text{ har kvadratrot} \\ &= MZM^{-1}MZM^{-1} \\ &= B^2, \qquad \text{der } B = MZM^{-1}. \end{aligned}$$

5c (10 poeng)

Sett

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Finn en matrise B slik at $B^2 = A$.

Forslag til svar: Egenverdiene til A er $1, 4, 9$ og egenvektorene blir

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Da blir

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Følgelig får vi at

$$B = M \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

SLUTT