Løsningsforslag eksamen MAT 1110 08.06.2018

Oppgave 1

a) $$\iint_D x^2 e^{-x^3} \sin y \, dx\,dy = \int_0^R \left[\int_0^\pi x^2 e^{-x^3} \sin y \, dy \right] dx$$

$$= \int_0^R \left[x^2 e^{-x^3} (-\cos y) \right]_{y=0}^{y=\pi} dx$$

$$= \int_0^R \left[x^2 e^{-x^3} \big(-(-1) - (-1) \big) \right] dx = 2 \int_0^R x^2 e^{-x^3} dx$$

$u = -x^3$

$\frac{du}{dx} = -3x^2$

$dx = \frac{-1}{3x^2} du$

$x=0$ gir $u=0$

$x=R$ gir $u=-R^3$

$$= 2 \int_0^{-R^3} x^2 e^u \left(\frac{-1}{3x^2} \right) du = -\frac{2}{3} \int_0^{-R^3} e^u \, du$$

$$= -\frac{2}{3} \left[e^{-R^3} - e^0 \right] = \underline{\underline{\frac{2}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right)}}$$

b) Beskrivelse av K_R i kulekoordinater:

$$\begin{cases} \rho \in [0, R] \\ \phi \in [0, \pi] \\ \theta \in [0, 2\pi) \end{cases} \qquad J = \rho^2 \sin\phi$$

Så vi får

$$I_{K_R} = \int_0^R \left[\int_0^\pi \left[\int_0^{2\pi} e^{-\rho^3} \cdot \rho^2 \sin\phi \, d\theta \right] d\phi \right] d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^R \left[\int_0^\pi \rho^2 e^{-\rho^3} \sin\phi \, d\phi \right] d\rho$$

$$\overset{a)}{=} 2\pi \cdot \frac{2}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}\left(1 - e^{-R^3}\right)}}$$

Dette gir

$$\lim_{R\to\infty} I_{K_R} = \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{3}\left(1 - \underbrace{e^{-R^3}}_{\to 0}\right) = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3}}}$$

Oppgave 2

a) $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 8x - 24 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 10 \end{cases}$$

Så $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gir $\begin{cases} 8x - 24 = 0 \\ 2y - 10 = 0 \end{cases}$ dvs. $x = 3$, $y = 5$

Stasjonært punkt for f: $(3, 5)$

Hesse-matrisen til f:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

H har egenverdiene 8 og 2, som begge er strengt positive.
Altså er $(3, 5)$ et lokalt minimumspunkt for f.

b) $$4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225 = 0$$

kan skrives

$$4(x^2 - 6x) + 9(y^2 - 10y) = -225$$

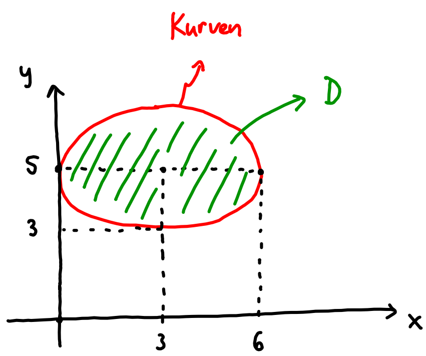
$$4(x^2 - 6x + 9) + 9(y^2 - 10y + 25) = -225 + 4 \cdot 9 + 9 \cdot 25$$

$$4(x-3)^2 + 9(y-5)^2 = 36$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} + \frac{(y-5)^2}{2^2} = 1$$

Dette viser at kurven er en ellipse med sentrum $(3, 5)$ og halvakser 3 og 2.

Skisse:



Siden D er avgrenset av en ellipse, er D lukket og begrenset.
Det følger da fra ekstremalverdisetningen at f har et globalt maksimumspunkt og et globalt minimumspunkt på området D.

c) Fra det indre av D har vi kun en kandidat til global maks/min-verdi, nemlig $f(3,5) = 0$. For å se etter kandidater fra randen til D, bruker vi Lagrange:

$$\nabla f = \lambda \cdot \nabla g$$

med $g(x,y) = 4x^2 - 24x + 9y^2 - 90y + 225$ gir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad \text{dvs.} \quad \left\{\begin{aligned} 8x - 24 &= \lambda(8x - 24) \quad \mathrm{I} \\ 2y - 10 &= \lambda(18y - 90) \quad \mathrm{II} \end{aligned}\right.$$

I gir $\lambda = 1$ eller $x = 3$

II gir $\lambda = \frac{1}{9}$ eller $y = 5$

Dette gir tre muligheter:

1. $\lambda = 1, \; y = 5$
2. $x = 3, \; \lambda = 1/9$
3. $x = 3, \; y = 5$ (ikke på randen)

1 innsatt i kurven gir

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} = 1, \quad \text{dvs.} \quad x - 3 = \pm 3, \quad \text{altså} \quad x = \begin{cases} 6 \\ 0 \end{cases}$$

Kandidater:

$f(6,5) = 36 \qquad f(0,5) = 36$

2 innsatt i kurven gir

$$\frac{(y-5)^2}{2^2} = 1, \quad \text{dvs.} \quad y - 5 = \pm 2, \quad \text{altså} \quad y = \begin{cases} 7 \\ 3 \end{cases}$$

Kandidater:

$f(3,7) = 4 \qquad f(3,3) = 4$

Vi ser at $\nabla g(x,y) = (0,0)$ kun for $(x,y) = (3,5)$, som ikke er på randen til D. Våre 5 kandidater til maks/min er dermed alle. Konklusjon:

Global maksimumsverdi for f på D: $\underline{\underline{36}}$

— " — minimumsverdi — " — : $\underline{\underline{0}}$

(Kommentar: Oppgaven kan løses enklere ved å observere at $f(x,y) = 4(x-3)^2 + (y-5)^2$)

Oppgave 3

a) Forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{e^{n+1}(n+6)!\,(x-2)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{e^n(n+5)!\,(x-2)^n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{e(n+6)}{n+1}\cdot|x-2| = e\cdot|x-2|$$

Altså konvergens hvis

$$e\cdot|x-2|<1,\quad \text{dvs. } |x-2|<\frac{1}{e}$$

og divergens hvis $|x-2|>\frac{1}{e}$. Altså $R=\frac{1}{e}$. Endepunkter:

$x = 2+\frac{1}{e}$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n(n+5)!}{n!}\left(2+\frac{1}{e}-2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+5)!}{n!}$$

(Divergerer ved divergenstesten)

$x = 2-\frac{1}{e}$ gir

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n(n+5)!}{n!}\left(2-\frac{1}{e}-2\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+5)!}{n!}$$

(Divergerer ved divergenstesten)

Så: Rekken konvergerer for $x\in\left(2-\frac{1}{e},\ 2+\frac{1}{e}\right)$

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\pi^{2n+3}}{4^{2n+3}(2n+1)!}$$ kan oppfattes som

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+3} = x^2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$ med $x=\frac{\pi}{4}$ innsatt.

Rekken her konvergerer mot $\sin x$ for alle $x\in\mathbb{R}$, så med $x=\frac{\pi}{4}$ blir uttrykket til høyre

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi^2\cdot\sqrt{2}}{32}$$

Oppgave 4

a) Egenverdier:

$$\begin{vmatrix} \frac{3}{10}-\lambda & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10}-\lambda \end{vmatrix} = \left(\lambda - \tfrac{3}{10}\right)\left(\lambda - \tfrac{2}{10}\right) - \tfrac{6}{100}$$

$$= \lambda^2 - \tfrac{5}{10}\lambda + \tfrac{6}{100} - \tfrac{6}{100} = \lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda$$

$$= \lambda\left(\lambda - \tfrac{1}{2}\right) = 0 \quad \text{gir} \quad \lambda = \begin{cases} 0 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{(egenverdier)}$$

Egenvektorer til $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = 0 \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = 0 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{Begge sier} \\ y = -3x \end{pmatrix} \quad \text{Løsning: } \begin{pmatrix} A_1 \\ -3A_1 \end{pmatrix} \quad (A_1 \in \mathbb{R})$$

Egenvektorer til $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{gir}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{1}{10}y = \frac{1}{2}x \\ \frac{6}{10}x + \frac{2}{10}y = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \begin{pmatrix} \text{Begge sier} \\ y = 2x \end{pmatrix} \quad \text{Løsning: } \begin{pmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{pmatrix} \quad (A_2 \in \mathbb{R})$$

b) Skriver $\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix}$ som en lineærkombinasjon av egenvektorer for A:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ -3A_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_2 \\ 2A_2 \end{pmatrix} \quad \text{gir} \quad \begin{cases} A_1 + A_2 = 13 & \text{I} \\ -3A_1 + 2A_2 = 1 & \text{II} \end{cases}$$

I sier $A_1 = 13 - A_2$

II sier da $-3(13 - A_2) + 2A_2 = 1$, som gir $5A_2 = 40$, $A_2 = 8$

Så $A_1 = 13 - 8 = 5$. Konklusjon:

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad \text{(stemmer!)}$$

Dermed:

$$\vec{x}_n = A^n \cdot \begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix} = A^n\left[\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}\right] = A^n\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix}+A^n\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix}$$

$$= 0^n\cdot\begin{pmatrix}5\\-15\end{pmatrix} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n\cdot\begin{pmatrix}8\\16\end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix}8\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\\16\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\end{pmatrix}}} \quad \text{for } n>0$$

Dette gir

$$\lim_{n\to\infty}\vec{x}_n = \underline{\underline{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}}} \quad \text{fordi} \quad \left(\tfrac{1}{2}\right)^n \to 0. \quad \text{Vi har } \vec{x}_0 = \underline{\underline{\begin{pmatrix}13\\1\end{pmatrix}}}.$$

c) Vi har

$$F_1(x,y) = \tfrac{3}{10}x + \tfrac{1}{10}y$$
$$F_2(x,y) = \tfrac{6}{10}x + \tfrac{2}{10}y$$

Så

$$\nabla F_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x}, \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{1}{10}\right)$$
$$\nabla F_2 = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial y}\right) = \left(\frac{6}{10}, \frac{2}{10}\right)$$

For alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ har vi dermed

$$|\nabla F_1|^2 = \frac{9}{100} + \frac{1}{100} = \frac{1}{10}$$
$$|\nabla F_2|^2 = \frac{36}{100} + \frac{4}{100} = \frac{4}{10}$$

Altså

$$\sqrt{|\nabla F_1|^2 + |\nabla F_2|^2} = \sqrt{\frac{5}{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

Det følger fra setning 5.5.8 at $\vec{F}$ er en kontraksjon.

<u>Kommentar</u>: Kunne også vist dette direkte uten bruk av setning 5.5.8 ved å regne slik, for eksempel:

$$|A\vec{x} - A\vec{y}|^2 = |A(\vec{x}-\vec{y})|^2 = \left|\begin{pmatrix}\frac{3}{10} & \frac{1}{10}\\ \frac{6}{10} & \frac{2}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_2-y_2\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left[\tfrac{3}{10}(x_1-y_1) + \tfrac{1}{10}(x_2-y_2)\right]^2 + \left[\tfrac{6}{10}(x_1-y_1) + \tfrac{2}{10}(x_2-y_2)\right]^2$$

$$\leq \tfrac{9}{100}(x_1-y_1)^2 + \tfrac{1}{100}(x_2-y_2)^2 + \tfrac{36}{100}(x_1-y_1)^2 + \tfrac{4}{100}(x_2-y_2)^2 + \tfrac{30}{100}(x_1-y_1)(x_2-y_2)$$

$$\leq \tfrac{80}{100}|\vec{x}-\vec{y}|^2 = \tfrac{4}{5}\cdot|\vec{x}-\vec{y}|^2$$

Dette gir $|A\vec{x} - A\vec{y}| < \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot|\vec{x}-\vec{y}|$, så $\vec{F}$ er en kontraksjon.