Løsningsforslag til eksamen i MAT 1110, våren 2006

Oppgave 1: a) Vi har

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a^2-a & 3 \\ -1 & 1 & -3 & a \end{bmatrix} \overset{II+(-2)I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a-2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & a \end{bmatrix}$$

$$\overset{III+I}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a-2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & a+1 \end{bmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a-2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+a & a \end{bmatrix}$$

b) Dersom $-a^2 + a \neq 0$, så har ingen rad pivotelement til slutt (i "**b**-delen"), og ligningen har derfor minst én løsning. I tillegg er alle søyler i "A-delen" pivotsøyler, så løsningen må være entydig. Siden ligningen $-a^2 + a = 0$ har løsningene $a = 0$ og $a = 1$, har vi derfor:

<u>Dersom $a \neq 0$ og $a \neq 1$, så har ligningen nøyaktig én løsning.</u>

Tilfellene $a = 0$ og $a = 1$ må vi se nærmere på. For $a = 0$, er den reduserte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siden ingen rader har pivotelement til slutt, har ligningen løsninger, og siden den tredje søylen (den siste i A-delen) ikke er en pivotsøyle, må det finnes uendelig mange av dem. Vi har dermed:

<u>Dersom $a = 0$, har ligningen uendelig mange løsninger.</u>

For $a = 1$, er den reduserte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Her har den nederste raden et pivotelement til slutt. Dermed kan vi konkludere med:

<u>Dersom $a = 1$, har ligningen ingen løsninger.</u>

c) For $a = 0$ er den reduserte matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at søyle 1 og 2 er pivotsøylene til den reduserte matrisen, og de tilsvarende søylene i C utgjør da en basis for søylerommet (Lay, theorem 13 i seksjon 2.8). Altså er

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en basis for søylerommet.

Nullrommet består av løsningene til ligningssystemet

$$\begin{aligned} x \quad + \ z + u &= 0 \\ y - 2z + u &= 0 \end{aligned}$$

Her kan z og u velges fritt, og vi har $x = -z - u$, $y = 2z - u$. På vektorform kan løsningene altså skrives

$$\begin{pmatrix} -z-u \\ 2z-u \\ z \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 2z \\ z \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u \\ -u \\ 0 \\ u \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at nullrommet er generert av vektorene

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

og siden disse er lineært uavhengige, danner de en basis. (For å se at vektorene er lineært uavhengige, observer at hvis

$$\mathbf{0} = x\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x-y \\ 2x-y \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

så må $x = y = 0$ for å få null i de to siste radene.)

Oppgave 2 a) Flaten $z = x^2 + y^2$ er en rotasjonsparaboloide som vokser oppover og har bunnpunkt i $(0,0,0)$. Planet $z = 2x + 6y - 6$ skjærer en skalk av paraboloiden. Skjæringen mellom de to flatene er gitt ved

$$x^2 + y^2 = 2x + 6y - 6$$

Denne ligningen kan omformes til

$$x^2 - 2x + y^2 - 6y = -6$$

og fullfører vi kvadratene, får vi

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

som er en sirkel i $xy-$planet med sentrum i $(1,3)$ og radius 2. Projeksjonen av området R i $xy-$planet er innsiden av denne sirkelen, altså

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$$

På grunn av måten paraboloiden krummer på, ligger planet over paraboloiden i området vi er interessert i (er du usikker, kan du sette $x = 1$, $y = 3$ inn i begge ligningene og se hvilken z-verdi som blir størst). Kombinerer vi alt dette, får vi:

$$V = \iiint_R 1 \; dV = \iint_A \left[\int_{x^2+y^2}^{2x+6y-6} 1 \; dz \right] \; dA =$$

$$= \iint_A \left[z \right]_{z=x^2+y^2}^{z=2x+6y-6} \; dA = \iint_A \left(2x + 6y - 6 - x^2 - y^2 \right) \; dA$$

$$= \iint_A (4 - (x-1)^2 - (y-3)^2) \; dA$$

der vi i siste trinn har fullført kvadratene (dette er ikke nødvendig, men gir enklere regninger i neste punkt).

b) For å regne ut integralet er det lurt å bruke polarkoordinater med sentrum i $(1,3)$. Da blir $x = 1 + r\cos\theta$ og $y = 3 + r\sin\theta$. Siden vi integrerer over en sirkel med sentrum i $(1,3)$ og radius 2, må r løpe fra 0 til 2, og θ løpe fra 0 til 2π. Integralet kan dermed skrives (husk Jacobi-determinanten r!):

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(4 - (r\cos\theta)^2 - (r\sin\theta)^2 \right) r \; d\theta \right] dr$$

Bruker vi at $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, gir dette

$$V = \int_0^2 \left[\int_0^{2\pi} \left(4r - r^3 \right) \; d\theta \right] dr$$

Altså er

$$V = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3) \; dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2} = 2\pi(8-4) = 8\pi$$

c) En potensialfunksjon ϕ må tilfredsstille kravene

1. $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = y^2 z \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = xy^2 z + C_1(y,z)$

2. $\dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2xyz \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = xy^2 z + C_2(x,z)$

3. $\dfrac{\partial \phi}{\partial z} = xy^2 \quad \Rightarrow \quad \phi(x,y,z) = xy^2 z + C_3(x,y)$

Vi ser at $\phi(x,y,z) = xy^2 z$ tilfredsstiller alle kravene, og følgelig er $\mathbf{F}$ en gradient med ϕ som potensialfunksjon.

Fra a) vet vi at skjæringskurven ligger over sirkelen $(x-1)^2+(y-3)^2=4$. Denne sirkelen kan vi parametrisere (mot klokken) med $x=1+2\cos t$, $y=3+2\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. For å finne z-komponenten setter vi inn i en av de to flateformlene. Bruker vi $z=2x+6y-6$, får vi

$$z(t)=2(1+2\cos t)+6(3+2\sin t)-6=4\cos t+12\sin t+14$$

Dermed er parametriseringen

$$\mathbf{r}(t)=(1+2\cos t)\,\mathbf{i}+(3+2\sin t)\,\mathbf{j}+(4\cos t+12\sin t+14)\,\mathbf{k},\qquad t\in[0,2\pi]$$

Deriverer vi, ser vi at

$$\mathbf{r}'(t)=-2\sin t\,\mathbf{i}+2\cos t\,\mathbf{j}+(-4\sin t+12\cos t)\,\mathbf{k}$$

Før vi setter inn parametriseringen, observerer vi at

$$I=\oint_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r}=\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}+\oint_C z\mathbf{i}\cdot d\mathbf{r}$$

Siden $\mathbf{F}$ er en gradient, må $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=0$, og dermed står vi igjen med

$$I=\oint_C z\mathbf{i}\cdot d\mathbf{r}$$

Nå er integrasjonen grei (bruk gjerne formelsamlingen):

$$I=\oint_C z\mathbf{i}\cdot d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}(4\cos t+12\sin t+14)(-2\sin t)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}(-8\cos t\sin t-24\sin^2 t-28\sin t)\,dt=$$

$$=\left[4\cos^2 t-24\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{4}\sin(2t)\right)+28\cos t\right]_0^{2\pi}=-24\pi$$

Oppgave 3: a) Bruker forholdstesten:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|(1+\frac{1}{n})x\right|=|x|$$

som gir konvergens for $|x|<1$ og divergens for $|x|>1$. Endepunktene må sjekkes for seg:

Endepunktet $x=1$: I dette endepunktet blir rekken $\sum_{n=1}^{\infty} n$ som divergerer siden leddene ikke går mot 0.

Endepunktet $x=-1$: I dette endepunktet blir rekken $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$ som divergerer siden leddene ikke går mot 0.

Dermed blir konvergensintervallet $I=(-1,1)$.

b) Summeformelen for geometrisk rekke gir

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{for } |x| < 1$$

Deriverer vi begge sider, får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Ganger vi med x på begge sider, får vi uttrykket vi ønsker oss:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

c) Vi har

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} n p^n (1-p) = (1-p) \sum_{n=1}^{\infty} n p^n = \frac{p}{1-p}$$

ifølge formelen i b). Skal $E \geq n$, må vi ha $\frac{p}{1-p} \geq n$. Løser ulikheten og får $p \geq \frac{n}{n+1}$.

Oppgave 4. En delmengde K av $\mathbf{R}^n$ er et underrom dersom følgende krav er oppfylt:

a) $\mathbf{0} \in K$
b) Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in K$
c) Hvis $\mathbf{u} \in K$, så er $c\mathbf{u} \in K$ for alle $c \in \mathbf{R}$

Disse kravene er oppfylt for H_1 og H_2, og vi må sjekke at de også er oppfylt for H:

a) Siden $\mathbf{0} \in H_1$ og $\mathbf{0} \in H_2$, så er $\mathbf{0} \in H = H_1 \cap H_2$.
b) Hvis $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, så er $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_1$. Siden H_1 tilfredsstiller b), må $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H_1$. Helt tilsvarende resonnement med H_1 erstattet med H_2 viser at $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H_2$. Dermed er $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ med i både H_1 og H_2, og følgelig er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.
c) Hvis $\mathbf{u} \in H$, så er $\mathbf{u} \in H_1$. Siden H_1 tilfredsstiller c), er $c\mathbf{u} \in H_1$. Tilsvarende resonnement viser at $c\mathbf{u} \in H_2$. Dermed er $c\mathbf{u}$ med i både H_1 og H_2, og følgelig er $c\mathbf{u} \in H$.

Dermed har vi vist at H tilfredsstiller kravene a)-c), og følgelig er H et underrom.