Eksamen i MAT 1110, Våren 2006

Oppgave 1: I denne oppgaven er C matrisen

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a^2-a & 3 \\ -1 & 1 & -3 & a \end{bmatrix}$$

der a er et reelt tall.

a) Bruk elementære radoperasjoner til å redusere C til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a-2 & 1 \\ 0 & 0 & -a^2+a & a \end{bmatrix}$$

b) Vi lar $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a^2-a \\ -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{bmatrix}$ slik at C er den utvidede matrisen $C = [A, \mathbf{b}]$. For hvilke verdier av a har likningssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ én, ingen og uendelig mange løsninger?

c) Velg $a = 0$. Finn basiser for søylerommet og nullrommet til C.

Oppgave 2: R er området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av paraboloiden $z = x^2+y^2$ og planet $z = 2x + 6y - 6$.

a) Forklar at volumet til R er

$$V = \iint_A (2x + 6y - 6 - x^2 - y^2)\, dA$$

der $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-3)^2 \leq 4\}$.

b) Regn ut V.

c) Vis at vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z\, \mathbf{i} + 2xyz\, \mathbf{j} + xy^2\, \mathbf{k}$$

er konservativt. Regn ut $\oint_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (y^2 z + z)\, \mathbf{i} + 2xyz\, \mathbf{j} + xy^2\, \mathbf{k}$$

og der C er skjæringskurven til flatene $z = x^2 + y^2$ og $z = 2x + 6y - 6$. Kurven er orientert mot klokken når du ser den ovenfra.

Oppgave 3: a) Finn konvergensområdet til rekken $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$.

b) Vis at summen til rekken i a) er $\frac{x}{(1-x)^2}$.

c) Du skal være med i et spørreprogram på radio. Du får spørsmålene i rekkefølge og ryker ut første gang du svarer galt på et spørsmål. Dersom sannsynligheten for at du svarer riktig på et spørsmål er p, har du funnet ut at forventningen til antall spørsmål du kommer til å svare riktig på, er

$$\sum_{n=1}^{\infty} np^n(1-p)$$

(du trenger ikke begrunne denne formelen). Finn et endelig uttrykk for denne rekken. Hvor stor må sannsynligheten p være for at forventningen skal bli minst n?

Oppgave 4: H_1 og H_2 er to underrom av $\mathbb{R}^n$. Vis at $H = H_1 \cap H_2$ også er et underrom av $\mathbb{R}^n$. (Husk at snittet $H_1 \cap H_2$ innholder de vektorene som er med i *begge* rommene H_1 og H_2.)