Vektorregning

En kort innføring for MAT 100

Tom Lindstrøm

Forord

Dette heftet er skrevet som en kort innføring i vektorregning for studentene i kurset MAT 100 ved Universitetet i Oslo. Selv om de fleste studentene i kurset allerede har vært borti vektorregning i den videregående skolen, har jeg for logikkens og sammenhengens skyld valgt å starte fremstillingen fra bunnen av. I undervisningen vil det sikkert være naturlig å hoppe over en del av det stoffet som skal være kjent fra før. Studenter som ikke har vært borti vektorregning tidligere, vil kanskje finne fremstillingen noe kortfattet enkelte steder, og de vil kanskje føle seg ekskludert av en del bemerkninger av typen: "Som vi husker fra videregående skole, så ...". Jeg håper likevel det vil være mulig å bruke heftet som en første innføring i emnet.

Én bemerkning kan være på sin plass. Under skrivingen har jeg vært opptatt av å legge grunnlaget for en del temaer som først kommer med full tyngde i neste kurs. Kanskje gjør dette fremstillingen litt tyngre enn den kunne ha vært enkelte steder, men jeg håper at leseren vil finne at disse små utfluktene betaler seg i fremtiden!

Litt om notasjon og organisering: Definisjoner, setninger og teoremer er nummerert fortløpende innen hvert kapittel. Eksempler og figurer er også nummerert kapittelvis, men med egen nummerering. Jeg bruker ♠ til å markere slutten på et bevis, og ♣ til å markere slutten på et eksempel.

Versjonen du nå leser er oppdatert for høstsemesteret 2001. Endringene er små — jeg har rettet noen trykkfeil, lagt til noen oppgaver og laget en fasit. I tillegg har jeg skrevet noen få bemerkninger om hvordan du kan bruke programpakken Maple til å håndtere vektorer og parametriserte kurver. I disse bemerkningene har jeg ofte henvist til boken *Getting Started with Maple* av Cheung, Keough & May som er Maplereferansen i MAT 100A. Er du ikke interessert i Maple, kan du bare hoppe over Maplebemerkningene.

Til slutt en stor takk til Klara Hveberg som har kommet med en rekke konstruktive forslag underveis, og som har hjulpet til med å lage fasiten. Hun har også funnet en utrolig mengde trykkfeil, men sannsynligvis har jeg klart å lage nye siden hun leste gjennom sist. Finner du noen, er det fint om du gir meg beskjed, f.eks. på e-post: lindstro@math.uio.no

Blindern, 16/8, 2001

Tom Lindstrøm

Innhold

Kapittel 1

Regning med n-tupler

I dette kapittelet skal vi studere de grunnleggende regnereglene for n-tupler og se på noen eksempler som antyder hva n-tupler kan brukes til.

Et *n-tuppel* er en sekvens av n (reelle) tall $(a_1, a_2, \ldots,\ a_n)$. For eksempel er $(3, -4, \frac{3}{4}, 7, 0, 3)$ et 6-tuppel, mens $(-1, \pi, -1, \frac{37}{42})$ er et 4-tuppel. Tallene a_1, a_2, $\ldots$, a_n kalles *komponentene* til n-tuppelet $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; a_1 er førstekomponenten, a_2 er andrekomponenten osv. To n-tupler regnes som *like* dersom de inneholder de samme tallene i den samme rekkefølgen. At $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, betyr altså at $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $\ldots$, $a_n = b_n$. Legg merke til at $(3, 2, 4) \neq (2, 3, 4)$; selv om tallene er de samme, er rekkefølgen forskjellig.

I dette heftet skal vi bruke bokstaver i **fete typer** som navn på n-tupler, f.eks. $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$. Det er vanskelig å bruke fete typer når man skriver for hånd, og man kan da isteden skrive en pil eller en strek over bokstaven — slik $\vec{a} = (-2, 3, 0, -17)$ eller slik $\bar{a} = (-2, 3, 0, -17)$.

Vi skal skrive $\mathbf{0}$ for det n-tuppelet som har alle komponenter lik 0, altså $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Hvis vi har et n-tuppel $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, skriver vi $-\mathbf{a}$ for n-tuppelet $(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$.

Det er en naturlig måte å definere addisjon og subtraksjon av n-tupler på. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, så er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots, a_n - b_n)$$

Vi sier at vi adderer og subtraherer *komponentvis*. Legg merke til at vi bare kan addere og subtrahere n-tupler av samme type—oppskriften ovenfor gir oss ikke noen måte å addere et 3-tuppel og et 7-tuppel på. Før vi ser på noen eksempler, tar vi med en regneoperasjon til. Dersom s er et tall og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er et n-tuppel, definerer vi produktet av s og $\mathbf{a}$ til å være

$$s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, \ldots, sa_n)$$

Vi ganger altså s inn i hver komponent i $\mathbf{a}$.

Eksempel 1. Vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$. Da er

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (-2 + 4, 3 + (-1), 0 + 3, -17 + 17) = (2, 2, 3, 0)$$

og

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-2 - 4, 3 - (-1), 0 - 3, -17 - 17) = (-6, 4, -3, -34)$$

Hvis $s = 3$, får vi

$$s\mathbf{a} = (3 \cdot (-2), 3 \cdot 3, 3 \cdot 0, 3 \cdot (-17)) = (-6, 9, 0, -51) \qquad \clubsuit$$

Vi skal innføre en regneoperasjon til. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ er to n-tupler, definerer vi *skalarproduktet* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ved

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Legg merke til at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ er ikke er et n-tuppel, men et tall (eller en *skalar* som man ofte sier når man vil understreke at noe er et tall og ikke et n-tuppel). Hvis vi lar $\mathbf{a} = (-2, 3, 0, -17)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, 3, 17)$ som ovenfor, ser vi at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + (-17) \cdot 17 = -8 - 3 + 0 - 289 = -300$$

Vi har nå sett hvordan vi kan regne med n-tupler, og det er kanskje på tide å forklare hvorfor det er noen vits i slike regnestykker. Eksempelet nedenfor viser at n-tupler er naturlige redskap når vi skal holde styr på mer informasjon enn det som kan rommes i et enkelt tall, og at regneoperasjonene svarer til regnestykker det ofte er naturlig å utføre i slike sammenhenger.

Eksempel 2. En forretning har ansatt 7 studenter på timebasis. For å holde styr på hvor mange timer hver student har arbeidet, kan vi bruke et 7-tuppel $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_7)$ der t_1 er antall timer den første studenten har arbeidet, t_2 er antall timer den andre studenten har arbeidet osv. Dersom studentene arbeider mer, kan vi på samme måte kode tilleggstimene som et n-tuppel $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_7)$. Det totale antall timer som studentene har arbeidet, er nå gitt ved $\mathbf{t} + \mathbf{s}$.

Studentene har ulik erfaring og derfor ulik lønn. Hvis student nummer én har en timelønn på p_1 kroner, student nummer to har en timelønn på p_2 kroner osv., kan vi også representere lønnen som et 7-tuppel $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_7)$. Dersom studentene har arbeidet $\mathbf{t} = (t_1, t_2, \ldots, t_7)$ timer, er den totale lønnen som forretningen skylder, gitt av skalarproduktet $\mathbf{p} \cdot \mathbf{t} = p_1 t_1 + p_2 t_2 + \ldots + p_7 t_7$. Dersom alle studentene får et lønnstillegg på 7 prosent, får vi det nye lønnstuppelet ved å gange det gamle med skalaren 1.07, altså $1.07\mathbf{p}$. $\clubsuit$

Vi tar med noen eksempler til som viser hvordan n-tupler brukes til å holde styr på tallmessig informasjon i forskjellige sammenhenger.

Eksempel 3. Tilstanden til en gassbeholder er bestemt av trykket p, temperaturen T og volumet V. Hvis du får i oppdrag å måle tilstanden til beholderen ved forskjellige tidspunkt, kan det være naturlig å bruke 4-tupler (t, p, T, V) der t er tidspunktet for målingen. Forskjellen mellom to målinger $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er da gitt ved differensen $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. ♣

Eksempel 4. Et bilde på en fjernsynsskjerm eller en dataskjerm er bygget opp av små lysende punkter (piksler). Et vanlig format er $1280 \times 1024 = 1310720$ piksler. I hvert punkt må vi angi styrken til hver av de tre grunnfargene rødt, blått og grønt, så totalt har vi $3 \times 1310720 = 3932160$ tall å holde styr på. En naturlig måte å gjøre dette på er å oppfatte bilder som 3932160-tupler! ♣

Her er noen enkle regneregler for n-tupler (det finnes flere):

Setning 1.1 (Regneregler for n-tupler.) *Dersom* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *og* $\mathbf{c}$ *er n-tupler og s og t er reelle tall, gjelder følgende regneregler:*
(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$
(b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
(c) $s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s\mathbf{a} + s\mathbf{b}$
(d) $(s + t)\mathbf{a} = s\mathbf{a} + t\mathbf{a}$
(e) $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$ *og* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$
(f) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

Bevis: Alle disse reglene bevises lett ved å regne ut venstre- og høyresiden og kontrollere at svarene stemmer. Vi tar (c) og (f) som eksempler:
(c) Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, ser vi at venstresiden kan skrives

$$s(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = s(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$$
$$= (s(a_1 + b_1), s(a_2 + b_2) \ldots, s(a_n + b_n))$$
$$= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2 \ldots, sa_n + sb_n)$$

Tilsvarende kan høyresiden skrives

$$s\mathbf{a} + s\mathbf{b} = (sa_1, sa_2 \ldots, sa_n) + (sb_1, sb_2 \ldots, sb_n)$$
$$= (sa_1 + sb_1, sa_2 + sb_2, \ldots, sa_n + sb_n)$$

Siden de to uttrykkene er like, er (c) bevist.
(f) Vi ser at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \geq 0$$

siden kvadrater aldri er negative. Likhet har vi dersom $a_1^2 = 0$, $a_2^2 = 0$, ... $a_n^2 = 0$, dvs. dersom $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$. ♠

Vi har nå innført noen regneoperasjoner for n-tupler og sett på noen av de enkleste regnereglene. I de neste to kapitlene skal vi se at når n er lik 2 eller 3, er ikke regning med n-tupler noe annet enn regning med vektorer i planet og i rommet. Forskjellen er bare at i rommet og i planet har vi muligheten til å forestille oss vektorene geometrisk, og det gir oss en helt annen forståelse av hva de er. Mot slutten av heftet skal vi se at det er mulig å ta med seg mye av denne geometriske forståelsen når vi studerer generelle n-tupler. Dette vil gi oss en slags geometrisk forståelse av n-dimensjonale objekter!

Før vi går videre, tar vi med noen ord om notasjon. Mengden av alle n-tupler kaller vi $\mathbf{R}^n$. Når vi skriver $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, betyr dette derfor ikke noe annet enn at $\mathbf{a}$ er et n-tuppel. I dette heftet skal vi stort sett holde oss til reelle n-tupler, men vi kan selvfølgelig også tenke oss n-tupler $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ der komponentene c_1, c_2, ..., c_n er *komplekse* tall. Mengden av alle slike n-tupler kaller vi $\mathbf{C}^n$. Vi kan gjøre det enda mer generelt: Dersom A er en hvilken som helst mengde, betegner A^n mengden av alle n-tupler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ der $a_i \in A$ for alle $i = 1, 2, \ldots, n$.

Maplekommentar. Du kan bruke Maple til å regne med n-tupler. I Maple skriver man tupler med hakeparenteser istedenfor vanlige parenteser. For å skrive inn tuppelet $(1, -3, 0, 4)$ taster du for eksempel

```
[1,-3,0,4];
```

Du kan legge sammen tupler med en plusskommando

```
[1,-3,0,4]+[2,3,-4,0];
```

og du kan multiplisere med en skalar ved å bruke *:

```
4*[1,-3,0,4];
```

For å regne ut skalarproduktet må du bruke kommandoen `dotprod`:

```
dotprod([1,-3,0,4],[4,-5,2,1]);
```

Denne kommandoen forutsetter at du har lastet inn biblioteket **linalg**. Det gjør du ved kommandoen:

```
with(linalg):
```

De fleste avanserte operasjoner med n-tupler forutsetter at du har lastet inn dette biblioteket, og det er derfor alltid lurt å ha det på plass før du begynner å manipulere med n-tupler.

Du kan lese mer om Maple og n-tupler i kapittel 18 av *Getting Started with Maple*. I denne boken kalles n-tupler for (n-dimensjonale) vektorer.

0ppgaver til kapittel 1

1. Finn $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ når $\mathbf{a}=(1,-2,4,-5,1)$, $\mathbf{b}=(-3,5,5,0,-3)$ og $s=3$.

2. Finn $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $s\mathbf{a}$ og $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ når $\mathbf{a}=(7,0,4,-2,-5,4)$, $\mathbf{b}=(0,2,1,-6,0,-1)$ og $s=-4$.

3. Vi sier at $\mathbf{a}$ står ortogonalt på $\mathbf{b}$ dersom $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{0}$. Vis at dersom $\mathbf{a}$ står ortogonalt på både $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så står $\mathbf{a}$ ortogonalt på $\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

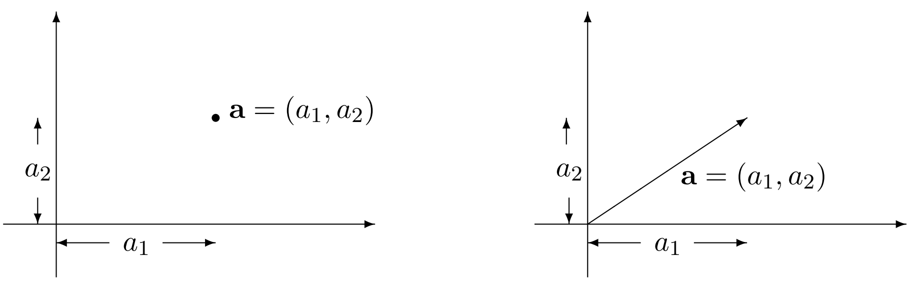
4. Bevis punkt d) i setning 1.1.

5. Bevis punkt e) i setning 1.1.

Kapittel 2

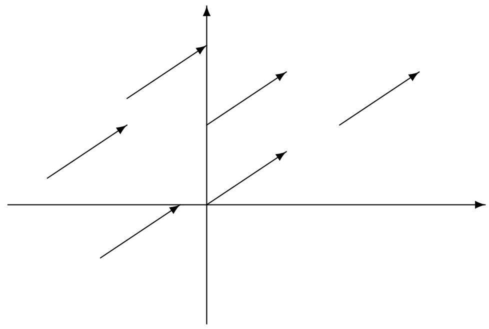
Vektorer i planet

Et 2-tuppel er ikke noe annet enn et par (a_1, a_2). Geometrisk kan vi tenke på et slikt par på to måter — enten som et *punkt* med koordinater a_1 og a_2, eller som en *vektor* (pil) som starter i origo og ender i dette punktet (se figur 1). I skolematematikken bruker man gjerne forskjellig notasjon om man tenker på paret som et punkt eller som en vektor — et punkt (a_1, a_2) har runde parenteser, mens en vektor $[a_1, a_2]$ har klammeparenteser. Det er ganske tungvint å bruke to forskjellige notasjoner, og vi vil derfor bruke runde parenteser $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ uansett om vi tenker på $\mathbf{a}$ som et punkt eller som en vektor. Hva som er naturlig, fremgår som regel av sammenhengen. Snakker vi om en linje gjennom $\mathbf{a}$, er det naturlig å tenke på $\mathbf{a}$ som et punkt, men snakker vi om en linje parallell med $\mathbf{a}$, er det naturlig å tenke på $\mathbf{a}$ som en vektor. Når jeg lager figurer, vil jeg noen ganger tegne paret (a_1, a_2) som en vektor og andre ganger som et punkt etter hva jeg synes passer best i hvert enkelt tilfelle (se figur 1).



Figur 1: $\mathbf{a}$ som et punkt og som en vektor

Ofte er det naturlig å tegne vektorer med et annet startpunkt enn origo. Vi skal derfor regne to vektorer som *like* dersom de har samme retning og er like lange (selv om de ikke starter samme sted). Figur 2 viser flere versjoner av den samme vektoren.

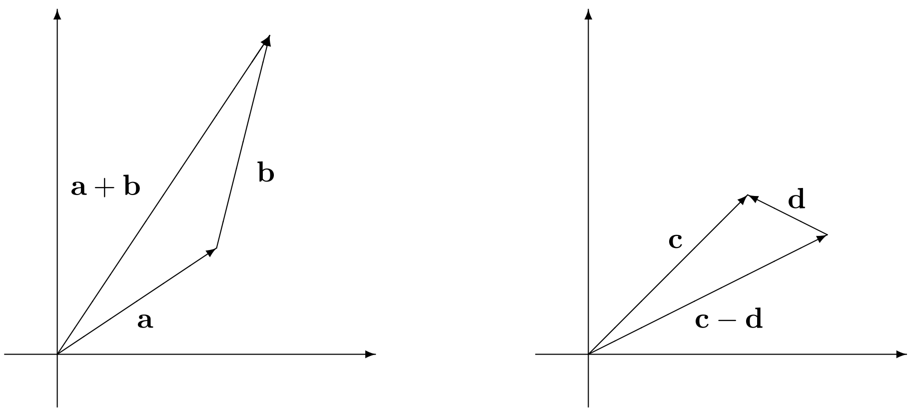


Figur 2: Forskjellige versjoner av samme vektor

Bemerkning: Det kan være på sin plass med en liten advarsel — det er ikke i alle sammenhenger vi kan neglisjere startpunktet til en vektor. Det er greit i dette heftet der vi bare er interessert i lengden og retningen til vektorer, men i fysikk symboliserer ofte vektorene krefter, og da er startpunktet viktig fordi det markerer det stedet hvor kraften angriper. Flytter vi startpunktet, får kraften ofte en helt annen virkning (tenk på en vektstang). I praksis er det nesten alltid klart om startpunktet spiller noen rolle eller ikke, men det skader ikke å være oppmerksom på problemstillingen.

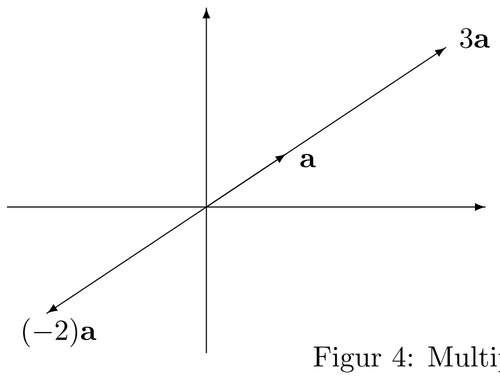
2.1 Geometrisk tolkning av regneoperasjonene

Når $n = 2$, kan de regneoperasjonene vi innførte i forrige kapittel, tolkes som sammensetting av vektorer. Figur 3 viser hvordan vi setter sammen vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ for å få $\mathbf{a}+\mathbf{b}$, og hvordan vi setter sammen $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ for å få $\mathbf{c}-\mathbf{d}$.



Figur 3: Addisjon og subtraksjon av vektorer

Multiplikasjon med en skalar har også en geometrisk tolkning. Dersom vi ganger $\mathbf{a}$ med et *positivt* tall s, beholder vektoren retningen, men blir s ganger så lang. Dersom vi ganger $\mathbf{a}$ med et *negativt* tall s, snur retningen $180°$ og den nye vektoren blir $|s|$ ganger så lang som den opprinnelige (se figur 4).



Figur 4: Multiplikasjon med et tall

Lengden $|\mathbf{a}|$ til en vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er gitt ved Pythagoras' setning:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom to punkter $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ gitt ved

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$$

Legg merke til at

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$$

Avstanden fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ er altså lik lengden til vektoren $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (lag en figur!).

To vektorer spiller en så viktig rolle at de har fått egne navn. Det er enhetsvektorene langs x- og y-aksen. Vi bruker betegnelsene

$$\mathbf{i} = (1, 0) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{j} = (0, 1)$$

I enkelte bøker vil du isteden finne notasjonen

$$\mathbf{e}_x = (1, 0) \qquad \text{og} \qquad \mathbf{e}_y = (0, 1)$$

Vi skal ikke gjøre mye bruk av disse betegnelsene i dette heftet, men det er greit å vite om dem.

Før vi går videre, tar vi oss tid til noen få ord om hva vektorer kan brukes til i fysikk. Der brukes vektorer til å beskrive fysiske fenomener som har både retning og størrelse, som for eksempel hastigheter og krefter. Når man kjører i en bil, er det ikke bare viktig å vite hvor fort man kjører — retningen har også noe å si. Man kan derfor beskrive hastigheten som en vektor der lengden angir hvor fort man kjører, og der retningen til vektoren forteller hvilken vei man kjører. Når man bruker en kraft for å flytte en gjenstand, drar man ikke bare med en viss styrke, men også i en bestemt retning. For å beskrive en slik kraft, bruker man en vektor der lengden angir styrken man drar med, og retningen angir hvilken vei man drar. Dersom det er flere krefter som trekker gjenstanden i hver sin retning, blir den samlede kraften (*resultanten*) summen av alle disse vektorene.

Oppgaver til seksjon 2.1

1. Vi har vektorene $\mathbf{a} = (-2, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 3)$. Tegn $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ i samme koordinatsystem.

2. La $\mathbf{a} = (-1, 3)$ og $\mathbf{b} = (2, 3)$. Tegn punktene $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ og $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ i samme koordinatsystem. Beskriv mengden av alle punkter $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$.

3. Tegn et punkt $\mathbf{a} = (a, b)$. Tegn deretter punktene $(-a, -b)$, $(b, -a)$, $(-b, a)$. Kommenter.

4. Finn avstanden fra $(-7, 8)$ til $(6, -3)$

5. Vannet i en elv renner med en fart på $1m/s$. Du kan svømme med en fart på $2m/s$ relativt til vannet. I hvilken retning bør du svømme dersom du skal til et punkt tvers over elven? Hvor lang tid bruker du på turen dersom elven er 50 meter bred?

2.2 Skalarproduktet

Skalarproduktet av de to vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ er gitt på vanlig måte:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Vi ser at vi kan uttrykke lengden $|\mathbf{a}|$ til $\mathbf{a}$ ved hjelp av skalarproduktet på denne måten:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

Sagt på en annen måte er

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Denne sammenhengen er grei å bruke når vi skal skrive opp kvadratsetningene for vektorer.

Setning 2.1 (Kvadratsetninger for vektorer) *Dersom* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er to vektorer i planet, gjelder:*
(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
(b) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
(c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$

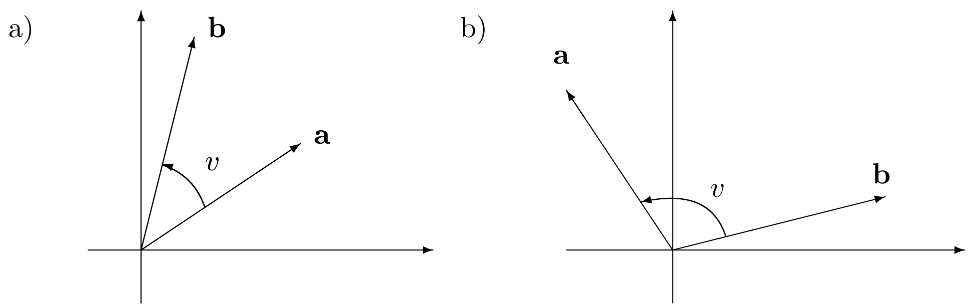
Bevis: Disse formlene kan bevises på flere måter — man kan for eksempel regne ut begge sider og se at man får det samme svaret, eller man kan bruke regnereglene 1.1 fra forrige kapittel. Som et eksempel skal jeg vise hvordan man bruker regnereglene til å vise punkt (a) — de andre punktene greier du sikkert selv.

Vi starter med venstresiden og regner ut (prøv å finne ut hvilke regneregler som brukes i hvert trinn):

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b}$$

$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \qquad \spadesuit$$

To vektorer **a** og **b** bestemmer en vinkel v mellom $0°$ og $180°$ som vist på figur 5. Vi kaller dette *vinkelen mellom* **a** *og* **b**. Legg merke til at dersom vi beveger oss i positiv omløpsretning, vil denne vinkelen noen ganger starte i **a** og ende i **b** (se figur 5a) og andre ganger starte i **b** og ende i **a** (se figur 5b). I det første tilfellet sier vi at paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er *positivt orientert*, i det andre tilfellet at det er *negativt orientert*. Her er åpenbart rekkefølgen til vektorene viktig — **a** er første vektor og **b** er andre vektor. Bytter vi om rekkefølgen av vektorene, bytter vi også orientering.



Figur 5: Vinkelen v

Som de fleste vil huske fra skolematematikken, kan skalarproduktet uttrykkes geometrisk ved hjelp av vinkelen v:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v \tag{2.1}$$

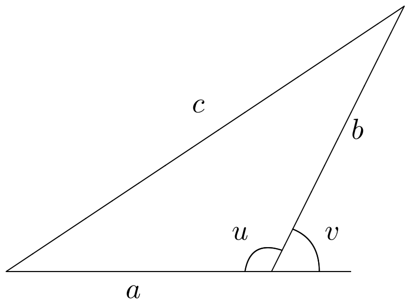
At skalarproduktet kan uttrykkes på to vidt forskjellige måter (både som $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2$ og som $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$), er svært nyttig. Den første måten er grei når man skal regne ut skalarprodukter eller bevise regneregler, mens den andre måten gjør det mulig å bruke skalarproduktet som et redskap i geometriske resonnementer.

Siden det geometriske uttrykket (2.1) for skalarproduktet er så viktig, skal vi utlede det her selv om det er kjent fra videregående skole. Det er flere utledninger å velge mellom, men den vi skal bruke, har den fordelen at den også fungerer for vektorer i rommet. Før vi starter på utledningen, minner jeg om *cosinussetningen* fra 2MX: Gitt en trekant som på figur 6. Da er

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos u$$

(husker du ikke denne setningen, finner du en utledning i oppgave 14). Siden $\cos u = -\cos v$ (hvorfor?), kan denne formelen også skrives

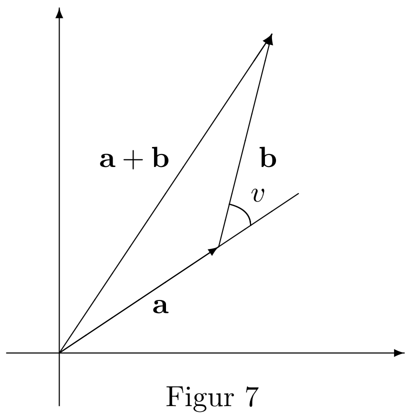
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos v \tag{2.2}$$



Figur 6: Cosinussetningen

Bevis for formel (2.1): Bruker vi formel (2.2) på trekanten i figur 7, ser vi at

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$$



Figur 7

Dersom vi isteden bruker den første kvadratsetningen ovenfor, får vi:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

Skal disse to uttrykkene være like, må

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$$

og beviset for (2.1) er fullført. ♠

Formel (2.1) er grei å bruke når man skal finne vinkelen mellom to vektorer.

Eksempel 1: Finn vinkelen v mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, -1)$ og $\mathbf{b} = (-2, 3)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{4\cdot(-2)+(-1)\cdot 3}{\sqrt{17}\sqrt{13}} = \frac{-11}{\sqrt{221}} \approx -0.74$$

En lommeregner forteller oss at $v \approx \arccos(-0.74) \approx 137.7°$. ♣

Som det neste eksemplet på sammenhengen mellom skalarproduktet og geometri, skal vi undersøke når vektorer er parallelle eller står normalt på hverandre (også dette er kjent fra skolematematikken). Husk at to ikke-null vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ *står normalt på hverandre* dersom vinkelen mellom dem er 90°, og at de er *parallelle* dersom vinkelen mellom dem er 0° eller 180° (vektorer som peker i motsatt retning, regnes altså som parallelle). Når to vektorer står normalt på hverandre, sier vi ofte at de er *ortogonale*.

Setning 2.2 *La* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *være to vektorer i planet forskjellig fra* $\mathbf{0}$. *Da gjelder:*
(a) $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ *med likhet hvis og bare hvis* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er parallelle.*
(b) $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er ortogonale hvis og bare hvis* $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$

Bevis: (a) Siden $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$ og $|\cos v| \leq 1$, er

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\cos v| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

med likhet hvis og bare hvis $|\cos v| = 1$, dvs. når v er lik 0 eller 180 grader.
(b) Siden $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er forskjellige fra $\mathbf{0}$, kan $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$ bare være 0 fordi $\cos v = 0$, og det skjer bare når v er 90 grader. ♠

Eksempel 2: For å vise at vektorene $\mathbf{a} = (-3, 4)$ og $\mathbf{b} = (2, \frac{3}{2})$ er ortogonale, sjekker vi at skalarproduktet er lik 0:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (-3)\cdot 2 + 4\cdot\frac{3}{2} = -6 + 6 = 0$$

Altså er vektorene ortogonale. ♣

Tidligere i kurset har vi møtt trekantulikhetene for reelle og komplekse tall. Nå kommer trekantulikheten for vektorer:

Setning 2.3 (Trekantulikheten) *Dersom* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er to vektorer i planet, så er*

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

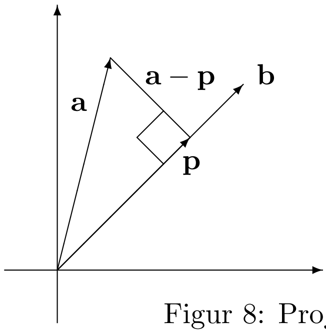
Bevis: Geometrisk sier denne setningen at lengden til én side i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre (forklar!). Vi kan gi et algebraisk bevis ved å kombinere første kvadratsetning og setning 2.2a) ovenfor:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

Siden både $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ og $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ er positive, må

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| \quad ♠$$

Vi skal nå bruke den geometriske tolkningen av skalarproduktet til å studere projeksjoner. Figur 8 viser projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$. Projeksjonen $\mathbf{p}$ er vektoren som er parallell med $\mathbf{b}$ og så lang at $\mathbf{a}-\mathbf{p}$ står normalt på $\mathbf{b}$.



Figur 8: Projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{a}$ ned på $\mathbf{b}$

Vi skal finne et uttrykk for $\mathbf{p}$. Siden $\mathbf{p}$ er parallell med $\mathbf{b}$, må $\mathbf{p} = t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t. Siden $\mathbf{a} - \mathbf{p}$ står ortogonalt på $\mathbf{b}$, må vi derfor ha:

$$0 = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} - t\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - t|\mathbf{b}|^2$$

Løser vi denne ligningen med hensyn på t, får vi

$$t = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$$

Dette betyr at

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Vi får dermed dette resultatet:

Setning 2.4 *Anta at* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er to ikke-null vektorer i planet. Da er projeksjonen* $\mathbf{p}$ *av* $\mathbf{a}$ *ned på* $\mathbf{b}$ *gitt ved:*

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$$

Lengden til projeksjonen er

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|}$$

Bevis: Den første formelen har vi allerede utledet. Den andre kan vi for eksempel finne med følgende regnestykke:

$$|\mathbf{p}| = |t||\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|^2}|\mathbf{b}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} \qquad \spadesuit$$

Eksempel 3: Finn lengden til projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{a} = (2, -5)$ ned på $\mathbf{b} = (3, 4)$. Vi har

$$|\mathbf{p}| = \frac{|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}|}{|\mathbf{b}|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-5) \cdot 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{14}{5} \qquad \clubsuit$$

Projeksjonen av en vektor **a** ned på en annen vektor **b** brukes ofte i fysikk og mekanikk. Ved hjelp av projeksjonen **p** kan vi skrive **a** som en sum av to ortogonale vektorer **p** og $\mathbf{a}-\mathbf{p}$ der den ene (**a**) er parallell med **b** og den andre står normalt på **b**. Dette kalles å *dekomponere* **a**. Dekomposisjon brukes mye i forbindelse med krefter der vi ofte er interessert i den komponenten av kraften som peker i en spesiell retning (gjerne den retningen vi ønsker at kraften skal virke i).

Oppgaver til seksjon 2.2

1. Finn skalarproduktet av $(-2, 3)$ og $(4, 1)$. Finn også vinkelen mellom vektorene.

2. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 5$ og vinkelen mellom **a** og **b** er $45°$. Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

3. Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (4, 3)$ og $\mathbf{b} = (-1, 3)$. Finn også projeksjonen av **a** ned på **b**.

4. Hvor lang er projeksjonen av $(-3, 4)$ ned på $(1, 2)$?

5. Finn vinkelen som hver av vektorene $\mathbf{a} = (\sqrt{3}, 1)$ og $\mathbf{b} = (1, 1)$ danner med x-aksen. Regn ut $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ og bruk svaret til å finne et eksakt uttrykk for $\cos(15°)$.

6. Skriv $\mathbf{a} = (4, 3)$ som en sum av to vektorer **b** og **c** der **b** er parallell med $\mathbf{d} = (1, 2)$ og **c** står normalt på **d**.

7. $|\mathbf{a}| = 6$, $|\mathbf{b}| = 4$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 3$. Finn $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

8. $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 4$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 5$. Finn vinkelen mellom **a** og **b**.

9. Per påstår at han har to vektorer **a** og **b** slik at $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 7$. Hvorfor tror du ikke på ham?

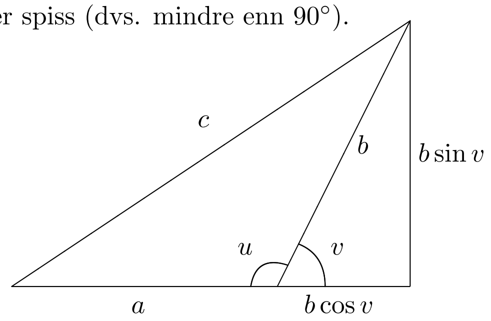
10. Kari påstår at hun har to vektorer **a** og **b** slik at $|\mathbf{a}| = 7$, $|\mathbf{b}| = 2$ og $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = 4$. Hvorfor tror du ikke på henne?

11. Bevis punkt b) og c) i setning 2.1.

12. Husk at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}|$. Bevis at $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq d(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + d(\mathbf{c}, \mathbf{b})$ for alle vektorer **a**, **b**, **c**. Hva er den geometriske tolkningen av denne ulikheten?

13. Anta at **b** og **c** står normalt på **a**. Vis at **b** og **c** er parallelle.

14. Forklar at på figuren nedenfor er $(a + b\cos v)^2 + (b\sin v)^2 = c^2$. Bruk dette til å bevise cosinussetningen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos u$ når vinkel u er stump (dvs. større enn $90°$). Bruk en tilsvarende figur til å bevise cosinussetningen når vinkel u er spiss (dvs. mindre enn $90°$).



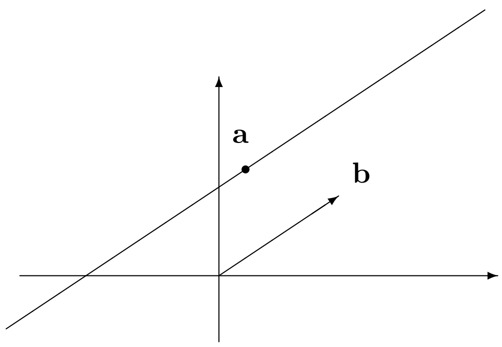
15. Vis at for alle vektorer $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ gjelder

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|^2 + |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = 2|\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{y}|^2$$

Vis at i et parallellogram er summen av kvadratene av sidene lik summen av kvadratene av diagonalene.

2.3 Parameterfremstilling

Vi skal nå se litt på hvordan vektorer kan brukes til å studere linjer i planet. Du er vant til å beskrive linjer ved hjelp av ligninger av typen $y = ax + b$. I vektorregning er det ofte nyttigere å bruke en annen beskrivelse av linjer. Vi tar utgangspunkt i en linje som går gjennom et punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og er parallell med vektoren $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ (se figur 9).



Figur 9: Rett linje gjennom **a** parallell med **b**

Siden enhver vektor $t\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{b}$, ser vi at alle punkter av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ må ligge på linjen (se figur 10). Det er heller ikke så vanskelig å overbevise seg om at ethvert punkt på linjen må være av formen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for ett eller annet tall t.

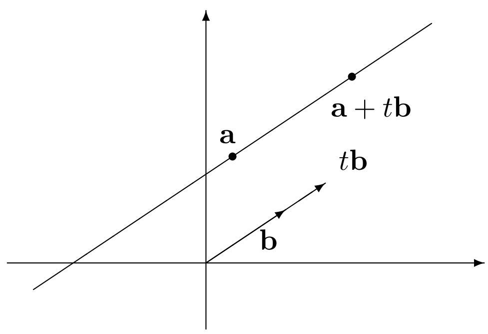
Vi har dermed kommet frem til at de punktene som ligger på den rette linjen, er nøyaktig de som er av typen $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ for et reelt tall t. Bruker vi koordinater, ser vi at

$$\mathbf{a} + t\mathbf{b} = (a_1, a_2) + t(b_1, b_2) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$$

Dette uttrykket kaller vi en *parameterfremstilling* for den rette linjen. Det er ofte greit å ha et kortere navn på parameterfremstillingen, og vi skriver da gjerne

$$\mathbf{r}(t) = (a_1 + tb_1, a_2 + tb_2)$$

Tenk på $\mathbf{r}(t)$ som et punkt som beveger seg langs linjen når t endrer seg.



Figur 10: Parameterfremstilling av en rett linje

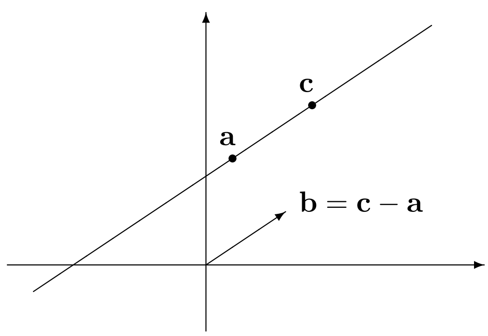
Eksempel 4: Vi skal finne en parameterfremstilling for den rette linjen som går gjennom punktet $\mathbf{a} = (2, 3)$ og er parallell med $\mathbf{b} = (-1, 4)$. Deretter skal vi undersøke om punktet $(5, -2)$ ligger på linjen. Etter formelen ovenfor får vi:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (2, 3) + t(-1, 4) = (2 - t, 3 + 4t)$$

La oss sjekke om punktet $(5, -2)$ ligger på linjen. Da må det finnes et tall t slik at $(2 - t, 3 + 4t) = (5, -2)$, det vil si at vi må ha

$$2 - t = 5 \qquad \text{og} \qquad 3 + 4t = -2$$

Løser vi den første ligningen, får vi $t = -3$, men prøver vi denne løsningen i den andre ligningen, ser vi at den ikke passer. Det betyr at punktet *ikke* ligger på linjen (hadde $t = -3$ passet i denne ligningen også, ville punktet ha ligget på linjen). ♣



Figur 11: En rett linje gjennom to gitte punkter

Hittil har vi beskrevet en linje ved å oppgi at den går gjennom et gitt punkt og er parallell med en gitt vektor, men ofte er det andre beskrivelser som er mer naturlige, for eksempel å oppgi to punkter som linjen går gjennom.

Hvordan finner vi en parameterfremstilling for linjen som går gjennom de to punktene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$? Det er lett — vi observerer bare at denne linjen må være parallell med vektoren $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$ (se figur 11), og bruker deretter formelen ovenfor.

Eksempel 5: Vi skal finne en parameterfremstilling for den rette linjen som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (3, -5)$ og $\mathbf{c} = (-1, 4)$. Vi ser at $\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-1 - 3, 4 - (-5)) = (-4, 9)$. Dermed blir parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (3, -5) + t(-4, 9) = (3 - 4t, -5 + 9t) \qquad \clubsuit$$

Parametriserte linjer kan brukes til å beskrive jevne, rettlinjede bevegelser. Her er et enkelt eksempel:

Eksempel 6: I dette eksemplet er alle avstander målt i nautiske mil. En fiskebåt befinner seg ved tidspunktet $t = 0$ i punktet $(2, 3)$ og beveger seg med en jevn fart av 9 nautiske mil per time i retningen $(3, 4)$. Finn båtens posisjon etter t timer.

Siden vektoren $\mathbf{d} = (3, 4)$ har lengde 5, vil båten i løpet av en time ha forflyttet seg en strekning gitt ved $\frac{9}{5}\mathbf{d}$. I løpet av t timer vil den derfor ha forflyttet seg en strekning $\frac{9t}{5}\mathbf{d}$. Siden startposisjonen er $\mathbf{e} = (2, 3)$, må posisjonen etter t timer være:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{e} + \frac{9t}{5}\mathbf{d} = (2, 3) + \frac{9t}{5}(3, 4) = (2 + \frac{27t}{5}, 3 + \frac{36t}{5}) \qquad \clubsuit$$

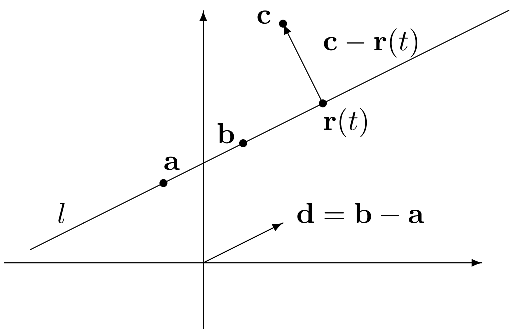
La oss ta med et litt mer omfattende eksempel.

Eksempel 7: Linjen l går gjennom punktene $\mathbf{a} = (-1, 2)$ og $\mathbf{b} = (1, 3)$. Vi skal finne det punktet på l som ligger nærmest punktet $\mathbf{c} = (2, 6)$. Det er flere måter å gå frem på, men uansett hvilken vi velger, trenger vi først å finne en bedre beskrivelse av punktene på l. Velger vi å bruke parameterfremstilling, regner vi først ut vektoren $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (1 - (-1), 3 - 2) = (2, 1)$. Parameterfremstillingen blir dermed

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{d} = (-1, 2) + t(2, 1) = (-1 + 2t, 2 + t)$$

Vi må nå finne ut hvilket av disse punktene som ligger nærmest $\mathbf{c}$. Det må være det punktet $\mathbf{r}(t)$ der vektoren $\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)$ står ortogonalt på linjen l (se figur 12), eller, med andre ord, ortogonalt på vektoren $\mathbf{d}$. Dette betyr at vi må ha

$$(\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{d} = 0$$



Figur 12: Punktet på l nærmest $\mathbf{c}$

Siden

$$(\mathbf{c} - \mathbf{r}(t)) = (2,6) - (-1+2t, 2+t) = (3-2t, 4-t)$$

ser vi at

$$(\mathbf{c}-\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{d} = (3-2t, 4-t)\cdot(2,1) = (3-2t)\cdot 2 + (4-t)\cdot 1 = 6-4t+4-t = 10-5t$$

Skal dette uttrykket være lik 0, må vi ha $t = 2$. Det punktet på l som ligger nærmest $\mathbf{c}$ finner vi altså ved å sette $t = 2$:

$$\mathbf{r}(2) = (-1+2\cdot 2, 2+2) = (3,4) \qquad \clubsuit$$

Oppgaver til seksjon 2.3

1. Finn en parameterfremstilling for linjen gjennom $(-3,-2)$ parallell med $(1,-2)$. Sjekk om punktet $(-7,6)$ ligger på linjen.

2. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom punktene $(2,-1)$ og $(3,8)$.

3. Finn en parameterfremstilling for linjen som går gjennom $(5,-2)$ og som står normalt på $(-1,2)$

4. Finn en parameterfremstilling for linjen som har ligning $2x+3y=6$

5. En linje har parameterfremstilling $(-3+2t, 2-t)$. Finn en ligning av typen $y = ax+b$ for denne linjen.

6. En linje går gjennom punktene $(0,1)$ og $(3,2)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(3,4)$.

7. En linje går gjennom $(3,-1)$ og er parallell med $(1,2)$. Finn avstanden fra punktet $(1,5)$ til linjen.

8. En linje går gjennom punktet $(1,2)$ og står normalt på vektoren $(3,4)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(9,2)$.

9. I denne oppgaven skal vi løse problemet i eksempel 7 på en annen måte.

a) Forklar hvorfor avstanden fra punktet $\mathbf{c} = (2, 6)$ til punktet $\mathbf{r}(t)$ på linjen er $\sqrt{(2t-3)^2 + (-4+t)^2}$.

b) Forklar hvorfor avstanden fra $\mathbf{c}$ til $\mathbf{r}(t)$ er minst når $f(t) = (2t-3)^2 + (-4+t)^2$ er minst.

c) Deriver $f(t)$ og bruk resultatet til å finne det punktet på linjen som ligger nærmest $\mathbf{c}$.

10. En linje har ligning $ax + by = c$. Vis at avstanden fra et punkt (x_0, y_0) til linjen er $\frac{|ax_0+by_0-c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

11. To skip er på kryssende kurs. Ved tiden $t = 0$ er det ene skipet i punktet $(0, 4)$, og det andre skipet i punktet $(39, 14)$ (alle avstander er målt i nautiske mil.) Det første skipet beveger seg parallelt med vektoren $(3, 4)$ med en fart av 15 knop (1 knop = 1 nautisk mil per time). Det andre skipet beveger seg parallelt med vektoren $(-12, 5)$ med en fart av 13 knop.

a) Hvor vil kursene krysse hverandre?

b) Vil skipene kollidere?

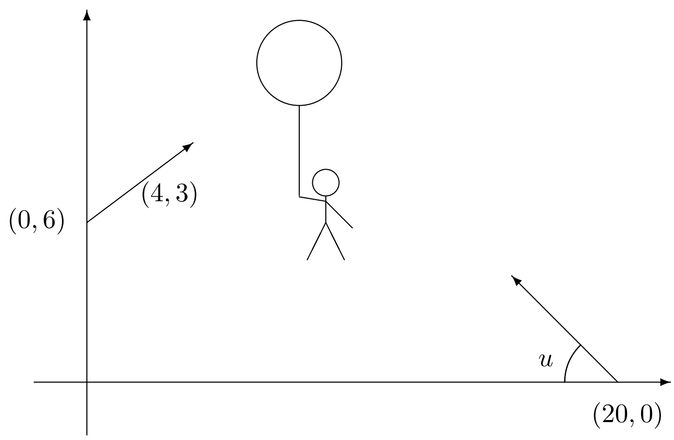
12. I sin evige jakt etter honning forsøker Ole Brumm å invadere et tre ved hjelp av en ballong. Plutselig blir ballongen tatt av et vindkast og farer av sted med Ole Brumm. Etter å ha tenkt seg om et øyeblikk, innser Kristoffer Robin at hans eneste sjanse til å redde vennen er å skyte istykker ballongen med lekegeværet sitt. Figuren nedenfor viser en skisse av situasjonen.

Når vindkastet kommer ved tiden $t = 0$, befinner ballongen seg i punktet $(0, 6)$. Den blir ført av gårde med en fart av $5m/s$ i retningen $(4, 3)$. Ved tiden $t = 2$ skyter Kristoffer Robin mot ballongen fra sin posisjon $(20, 0)$. Vinkelen mellom geværet og underlaget er u, og vi regner med at kulen beveger seg rettlinjet med en fart av $70m/s$. Alle avstander er målt i meter og tiden er målt i sekunder.

a) Forklar at ballongens posisjon ved tiden t er $(4t, 6 + 3t)$.

b) Vis at kulens posisjon ved tiden t er $(20 - 70(t-2)\cos u, 70(t-2)\sin u)$.

c) Hvilken vinkel u må Kristoffer Robin holde geværet i for å treffe midt i ballongen? Hvor langt er det ned til bakken når ballongen blir truffet?



2.4 Determinanter, arealer og orientering

En 2×2-*determinant* er et uttrykk

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

der a, b, c og d er fire tall. Dette uttrykket kan se mystisk ut, men det er rett og slett definert ved

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Legg merke til at uttrykket $ad - bc$ fremkommer fra diagonalene i $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$; ganger vi sammen tallene i den ene diagonalen, får vi ad, og ganger vi sammen tallene i den andre diagonalen, får vi bc.

Man kan selvfølgelig lure på hvorfor man trenger et så komplisert symbol som $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ for det enkle uttrykket $ad - bc$. Det er det ikke så enkelt å forklare nå, men når du senere lærer om matriser og generelle $n \times n$-determinanter, vil du se at denne definisjonen passer inn i et generelt system (vi skal se litt på 3×3-determinanter i neste kapittel).

La oss regne ut en determinant.

Eksempel 8: Vi ser at

$$\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 2 - (-5) \cdot 4 = -6 + 20 = 14 \qquad \clubsuit$$

Dersom vi har to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, kan vi lage en 2×2-determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ på denne måten:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Legg merke til at dersom vi bytter om rekkefølgen på vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, så skifter determinanten fortegn:

$$\det(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = b_1 a_2 - b_2 a_1 = -(a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

Som vi snart skal se, har både fortegnet og størrelsen til $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ en geometrisk betydning.

For å forstå den geometriske tolkningen av determinanten lønner det seg å skrive vektorene **a** og **b** på polarform. Vi lar α være vinkelen mellom den positive x-aksen og vektor **a** (se figur 13). Da er

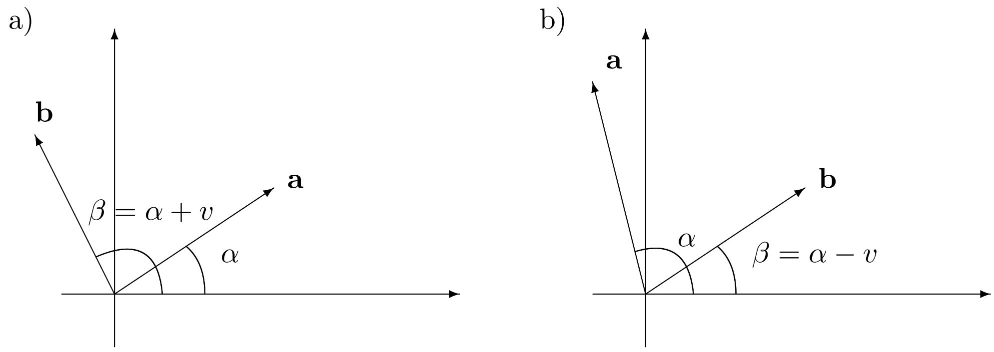
$$\mathbf{a} = (|\mathbf{a}|\cos\alpha, |\mathbf{a}|\sin\alpha)$$

(husk det du har lært om polarform til komplekse tall). La som vanlig v være vinkelen mellom vektorene **a** og **b**. Dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert (husk definisjonen rett før figur 5), lar vi $\beta = \alpha + v$. Da er på tilsvarende vis (se figur 13a)

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}|\cos\beta, |\mathbf{b}|\sin\beta)$$

Dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativt orientert, setter vi $\beta = \alpha - v$. Da er også i dette tilfellet (se figur 13b)

$$\mathbf{b} = (|\mathbf{b}|\cos\beta, |\mathbf{b}|\sin\beta)$$



Figur 13: Sammenhengen $\beta = \alpha \pm v$

Vi har altså

$$\beta = \alpha \pm v$$

der fortegnet er pluss eller minus ettersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert.

La oss nå finne determinanten uttrykt ved α og β:

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} |\mathbf{a}|\cos\alpha & |\mathbf{a}|\sin\alpha \\ |\mathbf{b}|\cos\beta & |\mathbf{b}|\sin\beta \end{vmatrix}$$

$$= |\mathbf{a}|\cos\alpha|\mathbf{b}|\sin\beta - |\mathbf{a}|\sin\alpha|\mathbf{b}|\cos\beta$$

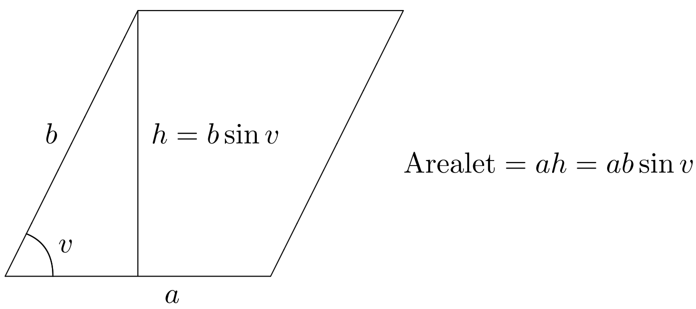
$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|(\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha)$$

$$= |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\beta - \alpha)$$

der vi i den siste overgangen har brukt formelen for sinus til en differens. Siden $\beta = \alpha \pm v$, får vi

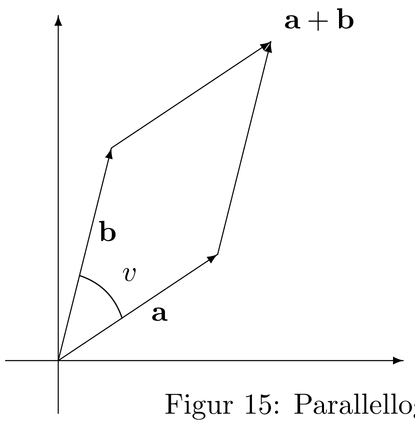
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin(\pm v) = \pm|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$$

Siden $\sin v$ aldri er negativ (v ligger per definisjon i intervallet $[0°, 180°]$ der sinus er positiv), vil $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ altså være positiv dersom paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orientert, og negativ dersom dette paret er negativt orientert. Fortegnet til determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gjenspeiler altså orienteringen til paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Legg forøvrig merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er 0 dersom v er $0°$ eller $180°$, det vil si når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle.



Figur 14: Arealet til et parallellogram

Etter at vi nå har funnet ut hva fortegnet til determinanten betyr, er det på tide å se på absoluttverdien. Aller først vil jeg minne om formelen for arealet til et parallellogram. Som det fremgår fra figur 14, er dette arealet gitt ved $A = ab\sin v$, der a og b er lengdene til sidene, og der v er vinkelen mellom dem (på figuren er vinkel v spiss, men det er lett å se at resultatet også holder dersom vinkelen er stump).



Figur 15: Parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$

Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (a_1, a_2)$ (se figur 15) er derfor lik $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin u = \pm \det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ der fortegnet er pluss eller minus ettersom $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert. Det betyr at arealet er lik tallverdien til determinanten. La oss oppsummere resultatene.

Setning 2.5 *Determinanten*

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

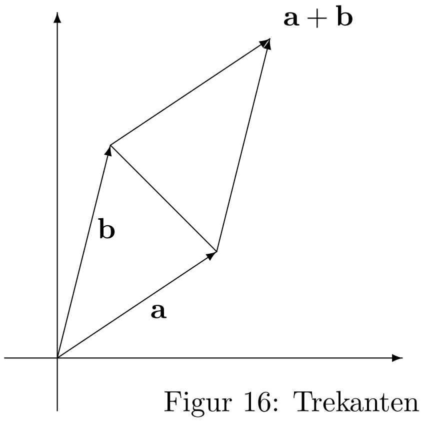
er positiv dersom vektorparet $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *er positivt orientert og negativ dersom paret er negativt orientert. Arealet til parallellogrammet utspent av* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er lik tallverdien til determinanten.*

Bemerkning: Matematikere sier at determinanten gir oss arealet med fortegn (eller orientering). Det kan virke merkelig å knytte fortegn til areal, men spesielt når man skal studere arealet til flater, viser det seg viktig å holde styr på retningen — det er i mange sammenhenger viktig å vite hva man skal regne som flatens "overside/underside" eller "utside/innside". Som vi skal se i neste kapittel, kan sammenhengen mellom determinant og "areal med fortegn" generaliseres til tre dimensjoner.

Eksempel 9: Finn arealet utspent av vektorene $\mathbf{a} = (3, -7)$ og $\mathbf{b} = (-4, 5)$. Vi får

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-7) \cdot (-4) = 15 - 28 = -13$$

Arealet er dermed $|-13| = 13$. Siden $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er negativ, er paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ negativt orientert, dvs. at vinkelen fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ er større enn 180°. ♣



Figur 16: Trekanten med sider **a** og **b**

Determinanter kan også brukes til å regne ut arealet til trekanter. Arealet til trekanten med sider **a** og **b** er halvparten av arealet til parallellogrammet utspent av disse vektorene (se figur 16).

Vi har derfor følgende resultat:

Korollar 2.6 *Arealet til trekanten med sider* **a** *og* **b** *er* $\frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})|$

Eksempel 10: Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{c} = (-1, 2)$, $\mathbf{d} = (4, 8)$ og $\mathbf{e} = (2, -3)$. Vi regner ut

$$\mathbf{a} = \mathbf{d} - \mathbf{c} = (4, 8) - (-1, 2) = (5, 6)$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{e} - \mathbf{c} = (2, -3) - (-1, 2) = (3, -5)$$

Trekanten vi er på jakt etter, har samme areal som trekanten med sider **a** og **b** (hvorfor?). Dermed er

$$\text{Areal} = \frac{1}{2} \cdot |\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})| = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |-25 - 18| = \frac{43}{2} \qquad \clubsuit$$

Maplekommentar: Du kan bruke Maple til å regne ut determinanter, se kapittel 18 i *Getting Started with Maple*. Fremgangsmåten kan se litt absurd ut fordi den bygger på begrepet *matrise* (engelsk *matrix*) som vi ikke har vært innom. Husk å laste inn biblioteket **linalg** før du begynner!

Oppgaver til seksjon 2.4

1. Regn ut determinantene

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (1, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, 1)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(-1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 7)$. Finn arealet.

4. En firkant har hjørner i punktene $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 7)$ og $(7, 4)$. Finn arealet.

5. Avgjør om parene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert:

a) $\mathbf{a} = (3, -1)$ $\mathbf{b} = (-7, 2)$ b) $\mathbf{a} = (-1, 5)$ $\mathbf{b} = (3, 2)$

6. Vis at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ hvis og bare hvis vektorene **a** og **b** er parallelle eller en av dem er **0**.

7. Vis at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, dvs. at vi får den samme determinanten om vi bytter om linjer og søyler.

8. Alle hjørnene til et parallellogram har heltallige koordinater. Vis at arealet er et helt tall.

9. Anta at $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

a) Vis at ligningssystemet $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ har løsningen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer med ligningssystemet når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

2.5 Parametriserte kurver

Vi har tidligere sett på parameterfremstilling av linjer, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}+t\mathbf{b}$. Ofte er det lurt å tenke seg at denne parametriseringen beskriver en gjenstand som beveger seg langs en rett linje slik at posisjonen ved tiden t er $\mathbf{r}(t)$. Nå er det ikke alltid at en gjenstand i bevegelse følger en rett linje, og for å fange mer generelle bevegelser, må vi utvide perspektivet litt. La oss tenke oss at gjenstanden ved tiden t har posisjonen $(x(t), y(t))$. Da er det naturlig å bruke notasjonen $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Skal bevegelsen foregå uten sprang, må funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ være kontinuerlige. Vi skal ta disse betraktningene som utgangspunkt for vår definisjon av parametriserte kurver:

Definisjon 2.7 *Anta at I er et intervall. En* parametrisert kurve *over intervallet I er en funksjon*

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$$

der $x, y : I \to \mathbf{R}$ er to kontinuerlige funksjoner. Parametriserte kurver kalles også vektorvaluerte funksjoner*.*

Det er ofte naturlig å tenke på $\mathbf{r}(t)$ som posisjonen ved tiden t, men det finnes situasjoner der andre tolkninger er naturlig — det kan f.eks. tenkes at $(x(t), y(t))$ er posisjonen en bil er i etter å ha kjørt t kilometer.

Eksempel 11: Parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad I = [0, \pi]$$

fremstiller en halvsirkel om origo med radius 1. Startpunktet er $(1, 0)$ og sluttpunktet $(-1, 0)$. En annen parametrisering av samme kurve får vi ved å sette

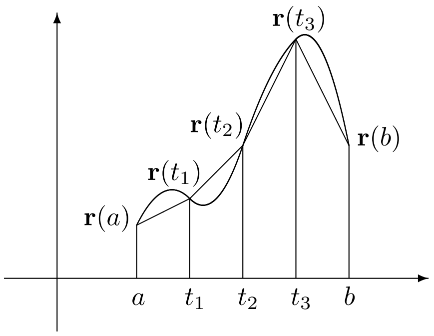
$$\mathbf{r}(t) = (-t, \sqrt{1 - t^2}) \qquad I = [-1, 1] \qquad \clubsuit$$

Eksempel 12: Parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2) \qquad I = [0, \infty)$$

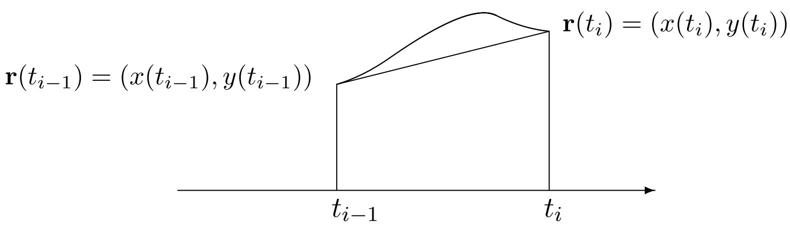
beskriver en bevegelse langs parabelen $y = x^2$. Farten i x-retning er konstant, men hastigheten i y-retning øker stadig. Bevegelsen starter i origo.

Et naturlig spørsmål er hvordan man finner lengden til en parametrisert kurve. Dersom jeg beveger meg langs den parametriserte kurven fra $t = a$ til $t = b$, hvor langt har jeg da gått?



Figur 17: Tilnærming til buelengden

Figur 17 viser en naturlig måte å nærme seg problemet på — vi deler intervallet $[a, b]$ med delepunkter $a = t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_n = b$ og regner ut lengden til den brukne kurven fra $\mathbf{r}(a)$ til $\mathbf{r}(t_1)$ videre til $\mathbf{r}(t_2)$ osv. inntil vi når $\mathbf{r}(b)$. Figur 18 viser et nærbilde av den i-te delen av en slik kurve fra $\mathbf{r}(t_{i-1})$ til $\mathbf{r}(t_i)$.



Figur 18: Tilnærming til buelengden

Ifølge Pythagoras' setning er lengden av denne delen av den brukne kurven lik

$$\sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$$

Hvis vi ganger og deler med $(t_i - t_{i-1})$, ser vi at dette uttrykket er lik

$$\sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \approx$$

$$\approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

Den totale lengden til den brukne veien er derfor

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\left(\frac{x(t_i) - x(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2}\,(t_i - t_{i-1}) \approx$$

$$\approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2}\,(t_i - t_{i-1})$$

(forutsatt at x og y er deriverbare). Gjør vi oppdelingen av intervallet finere og finere, nærmer dette uttrykket seg

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Følgende definisjon er derfor fornuftig:

Definisjon 2.8 *Anta at funksjonene x og y har kontinuerlige deriverte. Da er* buelengden *av den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ fra a til b*

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

Eksempel 13: La oss bruke formelen ovenfor til å regne ut omkretsen til en sirkel. Bruker vi parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t) \qquad\qquad t \in [0, 2\pi]$$

får vi

$$x'(t) = -\sin t \qquad\qquad y'(t) = \cos t$$

Dette gir

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 1\,dt = 2\pi \qquad \clubsuit$$

Vi skal nå se hvordan vi kan finne farten til gjenstanden vår. Fra tiden a til tiden t har den tilbakelagt en strekning $s(t)$ gitt ved $s(t) = L(a,t) = \int_a^t \sqrt{x'(r)^2 + y'(r)^2}\,dr$. Deriverer vi dette uttrykket med hensyn på t, får vi (ifølge analysens fundamentalteorem)

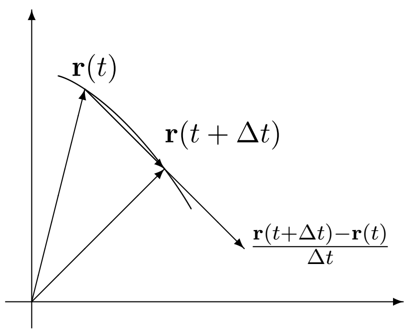
$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

Siden farten er den deriverte av strekningen med hensyn på tiden, forteller dette oss at farten til gjenstanden vår ved tiden t er

$$v(t) = s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$$

Formelen ovenfor gir oss farten ved tidspunktet t som en skalar størrelse $v(t)$. I mange sammenhenger er vi ikke bare interesert i hvor fort en gjenstand beveger seg, men også hvilken retning den beveger seg i. Vi er altså interessert i å oppfatte hastigheten som en vektor som har både størrelse og retning. La oss tenke gjennom problemet fra starten av.

I løpet av et lite tidsintervall $[t, t + \Delta t]$ vil partikkelen flytte seg fra $\mathbf{r}(t)$ til $\mathbf{r}(t + \Delta t)$. Forflytningen er altså $\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)$ og den gjennomsnittlige forflytningen per tidsenhet er $\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$. Dersom Δt er liten, vil vektoren $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ (og dermed den parallelle vektoren$\frac{1}{\Delta t}(\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t))$) nesten være en tangent til kurven, og denne tilnærmingen blir bedre og bedre dess mindre Δt er (se figur 19).



Figur 19: Tilnærming til tangenten

Den deriverte vektoren

$$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \Big(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \Big) = (x'(t), y'(t))$$

blir derfor både en tangent til kurven og en beskrivelse av forflytning per tidsenhet ved tidspunktet t. Dette er motivasjonen for følgende definisjon.

Definisjon 2.9 *Anta at funksjonene x og y er deriverbare. Da sier vi at den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ er* deriverbar, *og at den deriverte er*

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

I situasjoner der $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t, kaller vi $\mathbf{v}(t)$ for hastigheten *til gjenstanden.*

Bemerkning: Legg merke til terminologien — vektorstørrelsen $\mathbf{v}(t)$ kaller jeg *hastigheten*, mens tallet (skalaren) $v(t)$ kaller jeg *farten.* Dette pleide å være standard terminologi i matematikk- og fysikkbøker, men i senere år har det blitt mer og mer vanlig å bruke betegnelsen fart om både vektorstørrelsen $\mathbf{r}(t)$ og skalarstørrelsen $v(t)$. Jeg synes den gamle terminologien er oversiktlig og grei og holder derfor fast på den i dette heftet (det er en tilsvarende distinksjon på engelsk; farten kalles "speed" og hastigheten kalles "velocity"). Legg forøvrig merke til at $|\mathbf{v}(t)| = v(t)$ slik at farten er lengden til hastighetsvektoren.

Det er på tide med et eksempel:

Eksempel 14: Finn hastigheten og farten til den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t)$ (prøv å finne ut hvordan denne kurven ser ut!). Vi får

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) &= ((t\sin t)', (t\cos t)') \\ &= (\sin t + t\cos t, \cos t - t\sin t)\end{aligned}$$

Farten blir

$$\begin{aligned} v(t) = |\mathbf{v}(t)| &= \sqrt{(\sin t + t\cos t)^2 + (\cos t - t\sin t)^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + \cos^2 t - 2t\sin t\cos t + t^2\sin^2 t} \\ &= \sqrt{1+t^2} \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

De vanlige derivasjonsreglene gjelder også for derivasjon av vektorvaluerte funksjoner.

Setning 2.10 *Dersom* $\mathbf{r}_1(t)$ *og* $\mathbf{r}_2(t)$ *er to deriverbare parametriserte kurver, gjelder:*
(i) $(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$
(ii) $(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) - \mathbf{r}_2'(t)$
(iii) $(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)$
(iv) Dersom $\mathbf{r}(t)$ *er en deriverbar parametrisert kurve og* $u(t)$ *er en deriverbar funksjon, er* $(u(t)\mathbf{r}(t))' = u'(t) \cdot \mathbf{r}(t) + u(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$

Bevis: Vi tar (iii) som et eksempel (de andre bevises på lignende måte). Dersom

$$\mathbf{r}_1(t) = (x_1(t), y_1(t)) \qquad \mathbf{r}_2(t) = (x_2(t), y_2(t))$$

så er $\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$. Dermed er

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' &= (x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t))' \\ &= x_1'(t)x_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1'(t)y_2(t) + y_1(t)y_2'(t) \\ &= x_1'(t)x_2(t) + y_1'(t)y_2(t) + x_1(t)x_2'(t) + y_1(t)y_2'(t) \\ &= \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t) \qquad \spadesuit \end{aligned}$$

Vi tar med en konsekvens av (iii) som vi skal få bruk for senere:

Korollar 2.11 *Dersom* $|\mathbf{r}(t)|$ *er konstant, så er* $\mathbf{r}(t)$ *og* $\mathbf{r}'(t)$ *ortogonale.*

Bevis: Vi har $\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = C$ er konstant. Deriverer vi begge sider, får vi:

$$2\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$$

Følgelig er $\mathbf{r}(t)$ og $\mathbf{r}'(t)$ ortogonale. ♠

Den dobbbeltderiverte til $\mathbf{r}(t)$ er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t))$$

Dersom $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t, kalles $\mathbf{a}(t)$ for *akselerasjonen*. Dette er en vektor som forteller oss hvordan hastigheten endrer seg, både i størrelse og retning. I dagliglivet er det vanligere å snakke om akselerasjon i en litt annen betydning, nemlig som fartsendring per tidsenhet, dvs. som $a(t) = v'(t)$ (legg merke til at vi her deriverer skalarstørrelsen $v(t)$ og ikke vektorstørrelsen $\mathbf{v}(t)$). Vi skal kalle $a(t)$ for *baneakselerasjonen* ved tiden t. Det er naturlig å spørre om sammenhengen mellom vektoren $\mathbf{a}(t)$ og skalaren $a(t)$. Mange vil kanskje tippe at $|\mathbf{a}(t)| = a(t)$, men følgende eksempel viser at det ikke er tilfellet.

Eksempel 15: La

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t)$$

Da er

$$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t)$$

som gir $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = 1$. Følgelig er $a(t) = v'(t) = 0$, mens

$$\mathbf{a}(t) = (-\cos t, -\sin t)$$

Dette gir $|\mathbf{a}(t)| = 1$. Vi ser altså at $0 = a(t) \neq |\mathbf{a}(t)| = 1$. Det er ikke så vanskelig å forstå hva som foregår. Gjenstanden vår går i en sirkelbane med konstant fart. Siden farten er konstant, er baneakselerasjonen 0. Hastigheten skifter imidlertid retning hele tiden, og det medfører at $\mathbf{a}(t)$ er forskjellig fra $\mathbf{0}$. ♣

Forutsatt at $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, kan vi definere *enhetstangentvektoren* $\mathbf{T}(t)$ ved

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$$

Som navnet sier, har denne vektoren lengde 1 for alle t. Vi kan altså skrive $\mathbf{v}(t) = v(t)\mathbf{T}(t)$, og deriverer vi dette uttrykket, får vi (husk setning 2.10(iv)):

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = v'(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

Ifølge korollar 2.11 står $\mathbf{T}'(t)$ normalt på $\mathbf{T}(t)$ (og dermed på $\mathbf{v}(t)$). Vi har dermed vist:

Setning 2.12 *Dersom* $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, *kan akselerasjonen* $\mathbf{a}(t)$ *dekomponeres i to ortogonale vektorer*

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

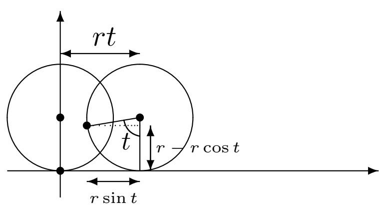
der $a(t)\mathbf{T}(t)$ *er parallell med tangenten og* $v(t)\mathbf{T}'(t)$ *står normalt på tangenten.*

Vi ser hva som skjer; baneakselerasjonen $a(t)$ måler hvor mye farten $v(t)$ endrer seg, mens $v(t)\mathbf{T}'(t)$ måler hvor mye retningen endrer seg. Det er mulig å finne et mer informativt uttrykk for leddet $v(t)\mathbf{T}'(t)$, men vi skal ikke komme nærmere inn på dette her.

La oss avslutte dette kapittelet med to eksempler som viser hvordan vi kan bruke parametriserte kurver til å beskrive fenomener i virkeligheten.

Eksempel 16: Hvilken kurve beskriver et punkt på et hjul når hjulet ruller bortover? Tenk deg av du har festet en refleksbrikke til et sykkeldekk og vil finne kurven som det lysende punktet beskriver i nattemørket.

Vi tenker oss at x-aksen er bakken som hjulet ruller på og at punktet vårt starter i origo. Etter at hjulet har dreiet seg en vinkel t, har hjulet flyttet seg en distanse rt mot høyre, der r er radien i hjulet. Koordinatene til det lysende punktet blir dermed $(rt - r\sin t, r - r\cos t)$ (se figur 20).

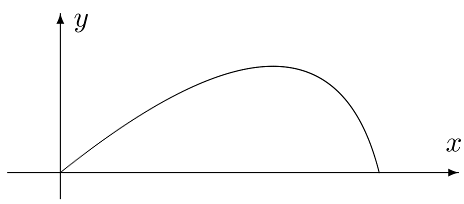


Figur 20: Et punkt på et rullende hjul.

Vi har dermed parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (rt - r\sin t, r - r\cos t)$$

Denne kurven kalles en *sykloide*. ♣



Figur 21: Kast med luftmostand.

Eksempel 17: I dette eksemplet skal vi studere en stein som kastes (eller et prosjektil som skytes ut) under luftmotstand. Vi skal beskrive bevegelsen i et koordinatsystem som vist på figur 21 der x-aksen ligger vannrett og y-aksen loddrett.

Vi trenger litt kunnskaper om fysikk. Dersom den totale kraften som virker på prosjektilet er $\mathbf{F}$ og akselerasjonen er $\mathbf{a}$, så forteller Newtons annen lov oss at $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ der m er massen til steinen. Det er to krefter som virker på steinen i luften. Den ene er tyngdekraften som er gitt ved $-mg\mathbf{j}$ der g er tyngdens akselerasjon ($g \approx 9.8m/s^2$), og der $\mathbf{j} = (0, 1)$. Den andre kraften er luftmotstanden som vi skal anta er lik $-k\mathbf{v}$ der k er en konstant og $\mathbf{v}$ er hastigheten til steinen (i virkeligheten er luftmotstand en komplisert affære og vår formel er bare én av flere mulige tilnærminger).

Vi lar $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ være posisjonen til steinen ved tiden t. Da er $\mathbf{v}(t) = (x'(t), y'(t))$ og $\mathbf{a}(t) = (x''(t), y''(t))$. Newtons lov $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ kan nå skrives

$$m\mathbf{a}(t) = -mg\mathbf{j} - k\mathbf{v}$$

Deler vi på m og ser på første- og annenkomponenten hver for seg, får vi:

$$x''(t) = -\frac{k}{m}x'(t) \qquad \text{og} \qquad y''(t) = -g - \frac{k}{m}y'(t)$$

For å finne kurven $\mathbf{r}(t)$ må vi løse disse differensialligningene med passende begynnelsesbetingelser. Vi antar at bevegelsen starter i origo med hastighet $\mathbf{v}(0) = (u_1, u_2)$. Da blir begynnelsesbetingelsene $x(0) = 0$, $x'(0) = u_1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = u_2$. Løser vi differensialligningene med disse begynnelsesbetingelsene (gjør det!), får vi

$$x(t) = \frac{mu_1}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$

$$y(t) = -\frac{mg}{k}t + (\frac{mu_2}{k} + \frac{m^2 g}{k^2})(1 - e^{-\frac{kt}{m}})$$

Vi har dermed parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \Big(\frac{mu_1}{k}(1 - e^{-\frac{kt}{m}})\Big)\mathbf{i} + \Big(-\frac{mg}{k}t + (\frac{mu_2}{k} + \frac{m^2 g}{k^2})(1 - e^{-\frac{kt}{m}})\Big)\mathbf{j}$$

Legger du denne formelen inn i Maple (se nedenfor) eller en lommeregner og velger verdier for m og k, kan du f.eks. eksperimentere med hvilken utkastvinkel som gir den største kastlengden (sett $u_1 = v_0 \cos(\alpha)$, $u_2 = v_0 \sin(\alpha)$ der v_0 er passende utgangsfart, og undersøk hvordan kastlengden varierer med vinkelen α). ♣

I fysikk og beslektede fag brukes parametriserte kurver til å beskrive hvordan objekter beveger seg, for eksempel hvordan planeter, stjerner og meteorer beveger seg i verdensrommet. Eksempelet ovenfor gir en liten følelse for hvordan man kommer frem til slike parameterfremstillinger: Ved å bruke Newtons lov $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ får vi satt opp differensialligninger som forbinder akselerasjonen $\mathbf{x}''(t) = \mathbf{a}(t)$, hastigheten $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{v}(t)$ og posisjonen $\mathbf{x}(t)$. Løser vi disse differensialligningene med passende begynnelsesbetingelser, finner vi parametriseringen.

Maplekommentar: Du kan få Maple til å tegne parametriserte kurver ved å bruke kommandoen `plot`. Vil du tegne kurven $\mathbf{r}(t) = (t^3, 2t + 1)$ mellom parameterverdiene $t = 1$ og $t = 4$, taster du

```
plot([t^3, 2*t+1,t=1..4]);
```

(legg merke til at parametergrensene `t=1..4` står *innenfor* hakeparentesene). Se kapittel 9 i *Getting Started with Maple* for ytterligere informasjon.

Oppgaver til seksjon 2.5

1. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

2. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t \sin t)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

3. En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Vis at denne kurven er ellipsen med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

c) Vis at omkretsen til ellipsen er $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$. Sett $a = 5$, $b = 3$ og finn omkretsen ved å bruke numerisk integrasjon på en lommeregner eller en datamaskin.

4. Finn buelengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3) \qquad t \in [0, 10]$$

5. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, \ln(\cos t))$ for $t \in [0, \pi/4]$.

a) Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og farten $v(t)$.

b) Finn buelengden (Hint: For å integrere $\frac{1}{\cos x}$ kan det være nyttig å bruke at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2(x)}$).

6. La $\mathbf{r}(t)$ være sykloiden i eksempel 16.

a) Finn hastigheten og akselerasjonen.

b) Vis at lengden punktet gjennomløper mens hjulet dreier en gang rundt, er $r\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$

c) Forklar hvorfor $\sqrt{1 - \cos t} = \frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos t}}$.

d) Regn ut integralet i b).

7. Bevis (i),(ii) og (iv) i setning 2.10.

8. En partikkel går i en sirkelbane med radius r om origo. Farten er konstant lik v. Partikkelen starter i punktet $(0,1)$ ved tiden $t=0$ og beveger seg mot urviserne.

a) Vis at posisjonen ved tiden t er $\mathbf{r}(t) = (r\cos(\frac{vt}{r}), r\sin(\frac{vt}{r}))$.

b) Vis at $\mathbf{a}(t) = -(\frac{v}{r})^2\mathbf{r}(t)$.

9. En kanonkule skytes ut med en fart v_0. I utskytingsøyeblikket danner kulens bane en vinkel α med horisontalplanet. Kulens posisjon etter t sekunder kaller vi $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Dersom vi kan se bort fra luftmotstanden, vil $x(t) = v_0 t\cos\alpha$ og $y(t) = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ der g er tyngdens akselerasjon.

a) Finn $\mathbf{v}$ og $\mathbf{a}$.

b) Hvor høyt over bakken er kulen på det høyeste?

c) Hvor langt kan kanonen skyte (vi antar at bakken er horisontal)?

10 Når er steinen i eksempel 17 i det høyeste punktet på banen? Hvor høyt er dette punktet?

11. Avstanden mellom det stedet der bakhjulet til en sykkel berører bakken, og det stedet der forhjulet berører bakken, er 1 meter. Når vi sykler, etterlater både forhjulet og bakhjulet et spor i bakken.

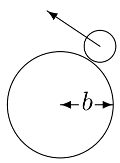
a) Anta at sporet bakhjulet etterlater seg, er gitt ved $\mathbf{r}_1(t)$. Vis at sporet forhjulet etterlater seg, har parametrisering $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t)$, der $\mathbf{T}_1(t)$ er enhetstangentvektoren til $\mathbf{r}_1(t)$.

b) Anta at bakhjulet følger kurven $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$. Finn parametriseringen $\mathbf{r}_2(t)$ til kurven som forhjulet følger.

c) Bruk en lommeregner eller en datamaskin til å tegne kurvene $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ i samme koordinatsystem.

d) Dersom du ser sporene etter en sykkel som har vinglet forbi, hvordan kan du avgjøre hvilken retning den har kjørt i?

12. Et hjul med radius a ruller på utsiden av en sirkel med radius b (se figuren). Finn en parameterfremstilling for den kurven et punkt på hjulet følger. Du kan selv velge hvordan du vil legge koordinatsystemet og hvor startpunktet er.



13. (Eksamen i MAT 100A/C, 8/12-2000) I denne oppgaven er $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ en parametrisert kurve og $\mathbf{b} = (0, y)$, $y > 0$, er et punkt på den positive y-aksen.

a) Skissér kurven og finn $\mathbf{r}'(t)$. Vis at den deriverte til funksjonen

$$f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2$$

kan skrives $f'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$.

b) Vi er interessert i å finne de punktene på kurven som ligger nærmest $\mathbf{b}$. Vis at dersom $\mathbf{r}(t_0)$ er et slik punkt, så er

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{b}) = 0$$

Forklar denne likningen geometrisk.

c) Finn de punktene på kurven som ligger nærmest $\mathbf{b}$.

14. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, der x og y har kontinuerlige deriverte x', y'. Anta at $g : [c, d] \to [a, b]$ er en voksende funksjon med kontinuerlig derivert og at $g(c) = a$, $g(d) = b$.

a) Forklar at $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(g(t))$, $c \leq t \leq d$, er en annen parametrisering av den samme kurven.

I resten av denne oppgaven skal vi vise at et par grunnleggende geometriske egenskaper til kurven er de samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

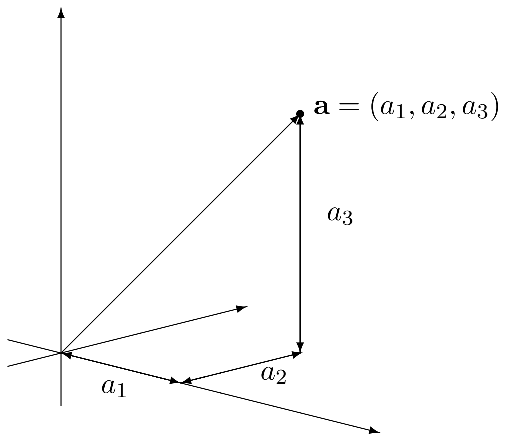
b) La $\mathbf{a} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(g(t_0))$ være et punkt på kurven. Vi kan regne ut to tangentvektorer i punktet $\mathbf{a}$, nemlig $\mathbf{s}'(t_0)$ og $\mathbf{r}'(g(t_0))$. Vis at disse vektorene er parallelle (vi godtar at den ene eller begge er lik $\mathbf{0}$).

c) Vis at buelengden til kurven blir den samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

Kapittel 3

Vektorer i rommet

I dette kapittelet skal vi studere vektorer i rommet. Mye av det som gjelder for vektorer i planet, gjelder med samme begrunnelse for vektorer i rommet, og vi skal derfor ikke gå gjennom alle resonnementer i detalj, men konsentrere oss om det som er nytt i det tre-dimensjonale tilfellet.



Figur 1: Tre-dimensjonale koordinater

Figur 1 viser hvordan 3-tuppelet (trippelet) $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ fremstilles i et tre-dimensjonalt koordinatsystem — a_1 er koordinaten langs førsteaksen, a_2 er koordinaten langs andreaksen, og a_3 er koordinaten langs tredjeaksen. Som tidligere lønner det seg noen ganger å tenke på trippelet (a_1, a_2, a_3) som et punkt og noen ganger som en vektor.

Akkurat som i det to-dimensjonale tilfellet har enhetsvektorene langs aksene egne navn. Vi skriver

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0) \quad \text{og} \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

I enkelte bøker vil du isteden finne notasjonen

$$\mathbf{e}_x = (1,0,0) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_y = (0,1,0) \quad \text{og} \quad \mathbf{e}_z = (0,0,1)$$

Legg merke til at enhver vektor kan uttrykkes ved hjelp av **i**, **j** og **k** på en naturlig måte:

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$$

Vi skal noen ganger ha bruk for denne skrivemåten.

3.1 Geometrisk tolkning av regneoperasjonene

Addisjon, subtraksjon og multiplikasjon med et tall har nøyaktig den samme tolkningen som i planet — addisjon og subtraksjon kan oppfattes som sammensetning av piler, og multiplikasjon med tallet s svarer til å forlenge vektoren med en faktor $|s|$ (og snu retningen hvis s er negativ).

Også skalarproduktet oppfører seg som før. Skalarproduktet av $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er definert ved:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Lengden til vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ er gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

og avstanden $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ mellom punktene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er gitt ved

$$d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

Vi har følgende resultater som bevises på samme måte som i planet.

Setning 3.1 *Hvis* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er to vektorer i rommet, gjelder:*
(a) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
(b) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 - 2\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$
(c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$
(d) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos v$ *der* v *er vinkelen mellom vektorene* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$
(f) Projeksjonen $\mathbf{p}$ *av* $\mathbf{a}$ *ned på* $\mathbf{b}$ *er gitt ved* $\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b}$

Vi tar med et eksempel på bruken av (f):

Eksempel 1: Finn projeksjonen $\mathbf{p}$ av vektoren $\mathbf{a} = (4, 3, -1)$ ned på vektoren $\mathbf{b} = (2, 1, -2)$. Vi får:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}\mathbf{b} = \frac{(4, 3, -1) \cdot (2, 1, -2)}{2^2 + 1^2 + (-2)^2}(2, 1, -2)$$

$$= \frac{13}{9}(2,1,-2) = (\frac{26}{9}, \frac{13}{9}, -\frac{26}{9}) \quad \clubsuit$$

Begrepene "parallell" og "ortogonal" er definert som i det to-dimensjonale tilfellet. To ikke-null vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er *parallelle* dersom det finnes et tall s slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b}$. De to vektorene er *ortogonale* dersom vinkelen mellom dem er $90°$. Det følger fra punkt d) i setningen ovenfor at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale hvis og bare hvis $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Også parametrisering av linjer foregår på samme måte i rommet som i planet. Linjen gjennom punktet $\mathbf{a}$ parallell med vektoren $\mathbf{b}$ har som før parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Her er et eksempel:

Eksempel 2: Finn parametriseringen til linjen som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (3, -4, 2)$ og $\mathbf{c} = (-1, 3, 1)$. Denne linjen er parallell med vektoren

$$\mathbf{b} = \mathbf{c} - \mathbf{a} = (-1, 3, 1) - (3, -4, 2) = (-4, 7, -1)$$

Dermed får vi

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b} = (3 - 4t, -4 + 7t, 2 - t) \quad \clubsuit$$

Oppgaver til seksjon 3.1

1. Finn projeksjonen av $(3, -2, 7)$ ned på $(1, -1, 2)$.

2. Finn lengden av projeksjonen av $(1, 0, -1)$ ned på $(2, 1, 1)$.

3. Finn vinkelen mellom vektorene $(1, 2, 3)$ og $(-1, 0, 1)$.

4. Skriv $\mathbf{a} = (2, 2, 1)$ som en sum av to vektorer $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ der $\mathbf{b}$ er parallell med $\mathbf{d} = (1, 0, -1)$ og $\mathbf{c}$ står normalt på $\mathbf{d}$

5. Finn en parametrisering av linjen som går gjennom punktet $(-1, -1, 2)$ og er parallell med $(2, 3, 1)$.

6. Finn en parametrisering av linjen som går gjennom punktene $(7, -3, 2)$ og $(-1, -1, 5)$.

7. Finn to vektorer som begge står normalt på $(3, 2, -1)$ og som ikke er parallelle.

8. En linje går gjennom punktene $(1, 0, 2)$ og $(0, 2, -1)$. Finn det punktet på linjen som ligger nærmest $(2, 3, -1)$.

9. Bevis setning 3.1.

10. To fly er i det samme området. Ved tiden $t = 0$ er det ene flyet i punktet $(0, 0, 2000)$ og flyr med en fart på $150m/s$ parallelt med vektoren $(2, 2, 1)$. Det andre flyet er ved tiden $t = 0$ i punktet $(5000, -1000, 4000)$ og 20 sekunder senere i punktet $(4400, 2000, 4000)$. Flyet følger en rett linje og holder konstant hastighet.

a) Vil kursene til de to flyene skjære hverandre?

b) Vil flyene kollidere?

3.2 Vektorproduktet

I tre dimensjoner finnes det en regneoperasjon som ikke eksisterer i to dimensjoner, nemlig vektorproduktet (eller kryssproduktet som det også kalles). Vektorproduktet mellom to vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er definert ved:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{k}$$

Denne formelen kan være vanskelig å huske, men det finnes en del huskeregler. Én slik huskeregel er vist i skjemaet nedenfor. Vi multipliserer langs pilene og gir resultatet positiv verdi dersom pilene går fra venstre mot høyre og negativ verdi dersom de går motsatt vei. Vi skal se på en annen huskeregel for vektorproduktet litt senere i dette heftet (og kan du en tredje, kan du trygt bruke den).

$$\begin{array}{cccccc}
\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} & \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\
a_1 & a_2 & a_3 & a_1 & a_2 & a_3 \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\
-a_3 b_2 \mathbf{i} & -a_1 b_3 \mathbf{j} & -a_2 b_1 \mathbf{k} & a_2 b_3 \mathbf{i} & a_3 b_1 \mathbf{j} & a_1 b_2 \mathbf{k}
\end{array}$$

La oss regne ut et vektorprodukt:

Eksempel 3: Finn vektorproduktet av $\mathbf{a} = (3, -1, 2)$ og $\mathbf{b} = (4, -2, 5)$. Vi får:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ((-1) \cdot 5 - 2 \cdot (-2))\mathbf{i} + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 5)\mathbf{j} + (3 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4)\mathbf{k}$$

$$= (-1, -7, -2) \quad \clubsuit$$

La oss gjenkalle hva som skjer dersom vi regner ut $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ istedenfor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = (b_2 a_3 - b_3 a_2,\ b_3 a_1 - b_1 a_3,\ b_1 a_2 - b_2 a_1)$$

$$= -(a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

For vektorproduktet gjelder altså ikke den gamle regelen om at faktorenes orden er likegyldig, men vi har i det minste en regel som ligner ganske mye. Vi sier at vektorproduktet er *anti-kommutativt*.

Her er en liste over de grunnleggende egenskapene til kryssproduktet:

Setning 3.2 *For vektorer* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *i rommet gjelder:*
(a) $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -(\mathbf{b}\times\mathbf{a})$
(b) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ *og* $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}$
(c) $\mathbf{a}\times(s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ *og* $(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ *der* $s\in\mathbf{R}$
(d) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *står ortogonalt på både* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$
(e) $|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$ *(*Lagranges identitet*)*

Bevis: Punkt a) har vi allerede bevist og de andre bevisene er av samme type — vi skriver vektorene på koordinatform, regner ut og ser at det stemmer: Vi tar c), d) og e) som eksempler:
c) Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, så er $s\mathbf{a} = (sa_1, sa_2, sa_3)$. Vi får:

$$(s\mathbf{a})\times\mathbf{b} = ((sa_2)b_3 - (sa_3)b_2, (sa_3)b_1 - (sa_1)b_3, (sa_1)b_2 - (sa_2)b_1)$$

$$= s(a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) = s(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

Den andre likheten i c) går på samme måte.
d) For å vise at $\mathbf{a}$ står ortogonalt på $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, må vi vise at $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Vi får:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$= a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_2a_1b_3 + a_3a_1b_2 - a_3a_2b_1 = 0$$

En helt tilsvarende regning viser at $\mathbf{b}$ står ortogonalt på $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$.
e) Vi skriver $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ og regner ut begge sider (du er ikke forpliktet til å føle at dette er spesielt festlig):

$$|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

$$= a_2^2b_3^2 - 2a_2a_3b_2b_3 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_1^2 - 2a_1a_3b_1b_3 + a_1^2b_3^2 + a_1^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 + a_2^2b_1^2$$

og

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$

$$= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2$$

$$-a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3$$

$$= a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 - 2a_1a_2b_1b_2 - 2a_1a_3b_1b_3 - 2a_2a_3b_2b_3$$

Bortsett fra rekkefølgen på leddene er dette det samme uttrykket som vi fikk ovenfor. Dermed er e) bevist. ♠

Bemerkning: Legg merke til at det ikke finnes noen assosiativ lov i listen ovenfor. Generelt er $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Som et eksempel lar vi $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$. Da er

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = ((1, 1, 0)\times(1, 0, 0))\times(0, 0, 1) = (0, 0, -1)\times(0, 0, 1) = \mathbf{0}$$

mens

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (1,1,0)\times((1,0,0))\times(0,0,1)) = (1,1,0)\times(0,-1,0) = (0,0,-1)$$

At $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ betyr at uttrykket $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ ikke gir noen mening — vi må ha med parenteser for å presisere hvilken rekkefølge produktene skal utføres i.

Akkurat som skalarproduktet har vektorproduktet en geometrisk tolkning som er viktig i anvendelser. Selv om denne tolkningen er kjent fra 3MX, skal vi gå gjennom den på nytt her. Vi tar utgangspunkt i punkt e) i setningen ovenfor:

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

Siden vi allerede vet at $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$, der v er vinkelen mellom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, så er

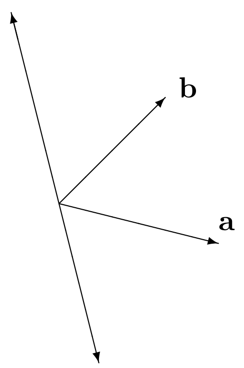
$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\cos^2 v = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2 v$$

der vi har benyttet at $1-\cos^2 v = \sin^2 v$. Altså er

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$$

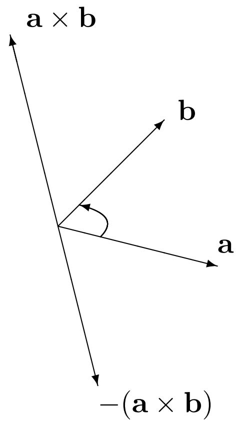
(husk at siden $0^\circ \leq v \leq 180^\circ$, er $\sin v$ aldri negativ). Dermed vet vi hvor lang vektoren $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ er. Legg spesielt merke til at $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ hvis og bare hvis $\sin v = 0$, dvs. dersom $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle.

Fra punkt d) i setning 3.2 vet vi også noe om retningen til $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, nemlig at $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ står normalt på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$. Nå finnes det to motsatt rettede vektorer som har lengde $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$ og står normalt på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ (se figur 2).



Figur 2: To vektorer som står normalt på både **a** og **b**

For å vite hvilken av disse to vektorene som er $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, bruker vi *høyrehåndsregelen*: Vi legger høyre hånd med fingrene fra $\mathbf{a}$ mot $\mathbf{b}$ mens vi spriker med tommelen. Da er $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ den av de to normalvektorene som peker i tommelens retning (se figur 3 der den krumme pilen viser den retningen fingrene peker).



Figur 3: Vektorene $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ og $-(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$

La oss oppsummere det vi har kommet frem til:

Setning 3.3 *La* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *være to vektorer i rommet og kall vinkelen mellom dem* v*. Da har vektorproduktet* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *lengde* $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin v$ *og står normalt på både* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$*. Retningen til* $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ *er gitt ved høyrehåndsregelen.*

Bevis: Vi har bevist alt bortsett fra høyrehåndsregelen. Beviset vi skal gi for denne regelen kan se litt umatematisk og skissemessig (og vanskelig!) ut, men det kan uten store endringer bygges ut til et fullverdig bevis.

Vi skal først bevise høyrehåndsregelen for to vektorer $\mathbf{a}=(a_1,a_2,0)$ og $\mathbf{b}=(b_1,b_2,0)$ som ligger i xy-planet. I dette tilfellet vil $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ være parallell med z-aksen. Hvis høyrehåndsregelen holder, skal $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ peke i samme retning som $\mathbf{k}$ dersom paret $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er positivt orientert, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er negativt orientert (sjekk dette!). Regner vi ut kryssproduktet får vi:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}=(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$$

Vi ser at $a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$. Det betyr at $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ peker i samme retning som $\mathbf{k}$ dersom determinanten $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ er positiv, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom determinanten er negativ. Siden fortegnet til denne determinanten gjenspeiler orienteringen til paret $(\mathbf{a},\mathbf{b})$, betyr dette at $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ peker i samme retning som $\mathbf{k}$ dersom paret $(\mathbf{a},\mathbf{b})$ er positivt orientet, og i samme retning som $-\mathbf{k}$ dersom dette paret er negativt orientert. Men det er jo akkurat hva høyrehåndsregelen forutsa, og følgelig gjelder høyrehåndsregelen når $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ ligger i xy-planet.

Vi er nå rede til å se på det generelle tilfellet $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Velg et par av vektorer $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ i xy-planet som er en "kopi" av paret $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Med dette mener jeg at $\mathbf{a}_0$ er like lang som $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_0$ er like lang som $\mathbf{b}$, og at vinkelen fra $\mathbf{a}_0$ til $\mathbf{b}_0$ er lik vinkelen fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$. La $\mathbf{c}_0 = \mathbf{a}_0 \times \mathbf{b}_0$. Siden vektorene $\mathbf{a}_0$ og $\mathbf{b}_0$ ligger i xy-planet, gjelder høyrehåndsregelen for $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{b}_0$ og $\mathbf{c}_0$.

La oss nå tenke på vektortrippelet $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}_0)$ som en materiell gjenstand, f.eks. tre sammensveisede biter av ståltråd. Vi flytter nå denne gjenstanden med en kontinuerlig bevegelse, uten å deformere den på noen måte, slik at $\mathbf{a}_0$ ender opp som $\mathbf{a}$, og $\mathbf{b}_0$ ender opp som $\mathbf{b}$. La $\mathbf{a}(t)$ være posisjonen til $\mathbf{a}_0$ etter t sekunder av denne bevegelsen, og la $\mathbf{b}(t)$ og $\mathbf{c}(t)$ være de tilsvarende posisjonene til $\mathbf{b}_0$ og $\mathbf{c}_0$. Hvis bevegelsen tar T sekunder, er dermed $\mathbf{a} = \mathbf{a}(T)$ og $\mathbf{b} = \mathbf{b}(T)$.

Dersom $\mathbf{c}(T) = \mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$, er høyrehåndsregelen oppfylt for trippelet $\mathbf{a}(T) = \mathbf{a}$, $\mathbf{b}(T) = \mathbf{b}$, $\mathbf{c}(T) = \mathbf{c}$. Vi skal derfor anta at $\mathbf{c}(T) = -\mathbf{a}(T) \times \mathbf{b}(T)$ (den eneste andre muligheten) og vise at dette fører til en selvmotsigelse. La t_0 være det første tidspunktet der $\mathbf{c}(t)$ skifter fra å være lik $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ til å være lik $-\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ (formelt er $t_0 = \inf\{t : \mathbf{c}(t) = -\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)\}$). Siden $\mathbf{c}(t)$ beveger seg kontinuerlig, betyr dette at $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ må gjøre et sprang ved tidspunktet t_0. Men det er umulig siden $\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)$ vil bevege seg kontinuerlig når $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ gjør det (tenk på det algebraiske uttrykket for vektorproduktet). Dermed har vi fått vår selvmotsigelse, og beviset er fullført. ♠

Vi skal nå se på noen av de tingene vektorproduktet kan brukes til. Først et enkelt eksempel.

Eksempel 4: Finn en vektor som står ortogonalt på både $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, -1, -2)$. Vi regner rett og slett ut vektorproduktet:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (1, -2, 3) \times (4, -1, -2) = (7, 14, 7)$$

Legg merke til at siden $(7, 14, 7) = 7(1, 2, 1)$, kan vi forenkle løsningen til $(1, 2, 1)$. ♣

Det neste vi skal se på, er hvordan hvordan vektorproduktet kan brukes til å regne ut arealer.

Setning 3.4 *Arealet til parallellogrammet utspent av vektorene* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er lik* $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. *Arealet til trekanten utspent av* $\mathbf{a}$ *og* $\mathbf{b}$ *er* $\frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$

Bevis: Fra forrige kapittel vet vi at arealet til et parallellogram er produktet av de to sidene ganget med sinus til den mellomliggende vinkelen. For vårt parallellogram blir dette $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin v$, som vi vet er lik $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Siden arealet av trekanten er halvparten av arealet til parallellogrammet, får vi også formelen for arealet av trekanten. ♠

Eksempel 5: Finn arealet til trekanten med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (2, -7, 3)$, $\mathbf{b} = (-2, 3, 2)$ og $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$. Denne trekanten har samme areal som den utspent av vektorene $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ (hvorfor?). Siden $\mathbf{c} - \mathbf{a} = (0, 9, -1)$ og $\mathbf{b} - \mathbf{a} = (-4, 10, -1)$, får vi:

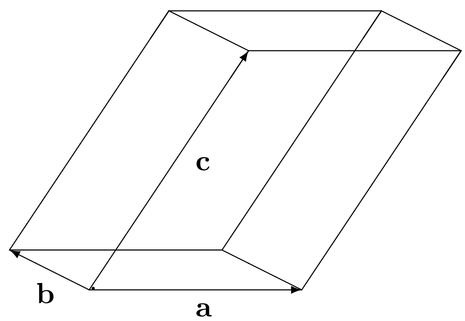
$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (0, 9, -1) \times (-4, 10, -1) = (1, 4, 36)$$

Dermed er arealet til trekanten lik

$$\frac{1}{2}|(1, 4, 36)| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + 4^2 + 36^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1313} \quad ♣$$

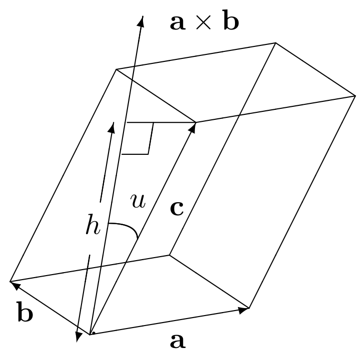
Eksemplet ovenfor viser noe av styrken ved å bruke vektorregning til å regne ut geometriske størrelser; det spiller ikke noen rolle hvor komplisert punktene ligger i forhold til hverandre — vi bare kopler inn den generelle formelen og ut faller svaret. Hadde vi prøvd å finne arealet med tradisjonelle geometriske metoder, hadde vi fort druknet i finurlige tegninger og kompliserte beregninger. Ulempen ved å bruke vektorregning er at vi ofte mister kontakten med det geometriske bildet — regningen viser oss at noe er riktig, men vi skjønner ikke riktig hvorfor.

Vektorproduktet kan også brukes til å regne ut volumer. Tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ i rommet definerer på en naturlig måte et romlegeme, et *parallellepiped* som vist på figur 4.



Figur 4: Parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$

Fra skolen vet vi at volumet til et parallellepiped er arealet av grunnflaten ganget med høyden. Sier vi at grunnflaten er parallellogrammet utspent av $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, vet vi at arealet til grunnflaten er $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. På figur 5 har vi kalt vinkelen mellom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ og den tredje vektoren $\mathbf{c}$ for u.



Figur 5: Volumet til et parallellepiped

Siden $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står normalt på grunnflaten, blir høyden h lik $|\mathbf{c}||\cos u|$ (vi må ha med tallverdien rundt cosinus i tilfelle u er større en 90°). Volumet til parallellepipedet er derfor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\mathbf{c}||\cos u|$. Men dette uttrykket er jo lik $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ (husk den geometriske beskrivelsen av skalarproduktet). Dermed har vi vist:

Setning 3.5 *Volumet til parallellepipedet utspent av vektorene* $\mathbf{a}$*,* $\mathbf{b}$*,* $\mathbf{c}$ *er* $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$

Bemerkning: Når vi skal regne ut volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, spiller selvfølgelig ikke rekkefølgen av de tre vektorene noen rolle. Volumet kan derfor skrives som både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{c}|$, $|(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a}|$, $|(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}|$, og $|(\mathbf{c} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a}|$. Disse seks uttrykkene må derfor være like. Hvis du orker, kan du sjekke dette ved direkte utregning.

Eksempel 6: Finn volumet til parallellepipedet som utspennes av vektorene $(4, 0, 3)$, $(-1, 2, -3)$ og $(0, 2, 1)$. Ifølge setningen er dette volumet gitt ved $|((4, 0, 3) \times (-1, 2, -3)) \cdot (0, 2, 1)|$. Vi regner først ut

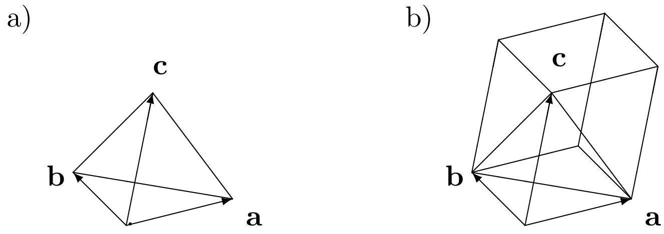
$$(4, 0, 3) \times (-1, 2, -3) = (-6, 9, 8)$$

Deretter tar vi

$$|(-6, 9, 8) \cdot (0, 2, 1)| = |0 + 18 + 8| = 26$$

Volumet er altså 26. ♣

Tre vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ utspenner også en pyramide (se figur 6a). For å finne volumet til denne pyramiden husker vi at volumet til en generell pyramide er $\frac{1}{3}gh$, der h er høyden og g er arealet til grunnflaten.



Figur 6: Pyramiden og parallellepipedet utspent av **a**, **b** og **c**

Sammenligner vi pyramiden utspent av **a**, **b**, **c** med parallellepipedet utspent av de samme vektorene (figur 6b), ser vi at høydene er like, men at grunnflaten til pyramiden er halvparten av grunnflaten til parallellepipedet. Det betyr at volumet til pyramiden må være en seksdel av volumet til parallellepipedet. Dermed har vi:

Korollar 3.6 *Volumet av pyramiden utspent av de tre vektorene* **a***,* **b***,* **c** *er* $\frac{1}{6}|(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}|$

Eksempel 7: Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $\mathbf{a} = (-1, 2, -3)$, $\mathbf{b} = (1, 4, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 4, 7)$ og $\mathbf{d} = (3, 0, 5)$. Denne pyramiden har samme volum som pyramiden utspent av vektorene $\mathbf{b}-\mathbf{a}$, $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ og $\mathbf{d}-\mathbf{a}$ (forklar hvorfor!). Siden

$$\mathbf{b}-\mathbf{a} = (2, 2, 4) \qquad \mathbf{c}-\mathbf{a} = (1, 2, 10) \qquad \mathbf{d}-\mathbf{a} = (4, -2, 8)$$

får vi:

$$\text{Volum} = \frac{1}{6}|((2, 2, 4) \times (1, 2, 10)) \cdot (4, -2, 8)|$$
$$= \frac{1}{6}|(12, -16, 2) \cdot (4, -2, 8)| = \frac{96}{6} = 16 \qquad \clubsuit$$

Maplekommentar Du kan få Maple til å regne ut vektorprodukter for deg ved hjelp av kommandoen `crossprod`, men dette forutsetter at du har lastet inn biblioteket **linalg**. Ønsker du for eksempel å regne ut $(1, -1, 2)\times(0, 4, 3)$, taster du

```
crossprod([1,-1,2],[0,4,3]);
```

Mer informasjon finner du i kapittel 18 av *Getting Started with Maple.*

Oppgaver til seksjon 3.2

1. Regn ut $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (-1, 3, 2)$ $\quad \mathbf{b} = (-2, 1, 7)$ b) $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$ $\quad \mathbf{b} = (-6, 1, 0)$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ og $\mathbf{b} = (4, 0, -2)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(0, -1, 2)$, $(2, -1, 4)$ og $(3, 0, 4)$. Finn arealet.

4. Finn en vektor som står normalt på både $(2, 0, -3)$ og $(-1, 3, 4)$.

5. Regn ut $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

6. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(3, -2, -2)$, $(0, 0, 4)$ og $(-3, 2, 1)$.

7. En pyramide har hjørner i punktene $(2, -1, 2)$, $(0, 5, -3)$, $(2, 4, 6)$ og $(3, -2, 4)$. Finn volumet.

8. Anta at alle hjørnene i et parallellepiped har heltallige koeffisienter. Vis at volumet er et helt tall.

9. Bevis setning 3.2b).

3.3 Determinanter, volumer og orientering

Gitt ni tall a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, definerer vi en 3×3-*determinant* ved

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

der 2×2-determinantene på høyre side regnes ut på vanlig måte. Legg merke til hvordan disse 2×2-determinantene fremkommer fra den opprinnelige determinanten — for å finne den 2×2-determinanten som ganges med a_1, stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_1 (se figur 7), for å finne den 2×2-determinanten som ganges med a_2, stryker vi den linjen og den søylen som går gjennom a_2, osv. Legg også merke til at fortegnene til leddene på høyre side veksler mellom pluss og minus.

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ \cancel{b_1} & b_2 & b_3 \\ \cancel{c_1} & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Figur 7: 2×2-determinanten som skal ganges med a_1

La oss regne ut en 3×3-determinant.

Eksempel 8: Regn ut

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 5 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2((-4)\cdot 2 - 0\cdot 1) - 3(5\cdot 2 - 0\cdot(-3)) + (-1)(5\cdot 1 - (-4)(-3))$$
$$= 2(-8) - 3\cdot 10 + (-1)(-7) = -16 - 30 + 7 = -39 \quad \clubsuit$$

Det er en nær sammenheng mellom 3×3-determinanter og kryssproduktet. Som et første eksempel har vi følgende huskeregel for kryssproduktet (den forutsetter at du husker hvordan man regner ut 3×3-determinanter):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Siden vi bare har definert determinanten når elementene a_1, a_2 osv. er tall, gir det første skrittet i denne utregningen egentlig ikke mening, men resultatet er likevel en grei huskeregel.

Vi har tidligere sett at 2×2-determinanter kan brukes til å regne ut arealer og til å bestemme orienteringen til vektorpar $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. På tilsvarende måte kan vi bruke 3×3-determinanter til å regne ut volumer og til å bestemme orienteringen til vektortripler $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Før vi begynner, kan det være greit å bli enig om notasjonen. Dersom $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, skriver vi

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Vi observerer så at

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

Sammenholder vi dette med setning 3.5 og korollar 3.6. får vi:

Setning 3.7 *Volumet av parallellepipedet utspent av vektorene* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *er* $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$. *Volumet av pyramiden utspent av* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *er* $\frac{1}{6}|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

Legg merke til at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$ hvis volumet til parallellepipedet er 0. Det skjer hvis og bare hvis vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ ligger i samme plan gjennom origo.

Hva så med orienteringen? Først må vi definere når et trippel $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt og negativt orientert: To punkter $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ definerer sammen med origo et plan (vi skal komme tilbake til plan i større detalj i neste seksjon).

Dette planet deler rommet i to halvdeler. Dersom $\mathbf{c}$ ligger på samme side av planet som kryssproduktet $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, sier vi at trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er *positivt orientert*. Dersom $\mathbf{c}$ ligger på den andre siden av planet, sier vi at trippelet er *negativt orientert*. Bruker vi den geometriske tolkningen av skalarproduktet, ser vi at trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ er positiv (for da er vinkelen mellom $\mathbf{c}$ og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ mindre enn $90°$). Det er lett (men ikke særlig spennende) å sjekke at $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ (det er ikke noe mystisk i dette — både $|(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}|$ og $|\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$ er lik volumet til parallellepipedet utspent av $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så alt vi sjekker er at fortegnet er det samme). Dette betyr at $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orientert hvis og bare hvis $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positiv. Vi har altså den samme forbindelsen mellom positiv orientering og positiv determinant som i det to-dimensjonale tilfellet.

Oppgaver til seksjon 3.3

1. Regn ut determinantene:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$

2. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(-1, 0, 2)$, $(3, -1, 3)$ og $(4, 0, -1)$.

3. Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $(2, 2, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(3, 4, 2)$ og $(7, 2, 2)$.

4. Avgjør om trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt eller negativt orientert når $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 4)$ og $\mathbf{c} = (7, -1, 2)$.

5. Vis at $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, dvs. at determinanten er den samme om vi bytter om søyler og linjer.

6. Vis ar dersom $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er ortogonale, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

7. I denne oppgaven er $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ tredimensjonale vektorer.

a) Vis at dersom to av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ er like, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ og alle skalarer s, t gjelder

$$\det(s\mathbf{a} + t\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = s \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + t \det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

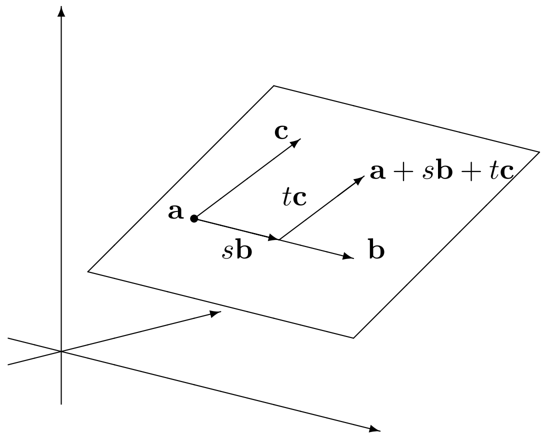
c) Vi sier at en vektor $\mathbf{a}$ er en *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dersom det finnes skalarer s, t slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. Bruk a) og b) til å vise at dersom $\mathbf{a}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

d) Gi en geometrisk forklaring på resultatet i c).

8. Vis at dersom $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er postivt (hhv. negativt) orientert, så er $(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ negativt (hhv. positivt orientert). Hva skjer med determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ når vi bytter om de to nederste linjene? Hva skjer dersom vi bytter om to andre linjer?

3.4 Plan

Intuitivt er et plan en ubegrenset plan flate i rommet. Naturlige eksempler er xy-planet (som består av alle punkter $(x, y, 0)$ med sistekomponent lik 0) og xz-planet (som består av alle punkter med annenkomponent lik 0). Det første planet er vannrett, det andre er loddrett. Tre punkter $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ som ikke ligger på samme rette linje, definerer alltid et plan i rommet. Det er lettest å forestille seg dette planet ved å tenke seg at man har en flyttbar, plan flate (f.eks. en enorm bordplate) som man lar hvile på de tre punktene.



Figur 8: Planet gjennom **a** utspent av **b** og **c**

Gitt et punkt $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og to ikke-parallelle vektorer $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, danner alle punkter på formen $\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$, der $s, t \in \mathbf{R}$, et plan som vi skal kalle *planet gjennom* **a** *utspent av* **b** *og* **c**. Dette planet består av alle de punktene du kan komme til når du starter i **a** og først går et stykke parallelt med **b** og så snur og går et stykke parallelt med **c** (se figur 8). Vi skal bruke skrivemåten

$$\mathbf{r}(s, t) = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

og kalle dette en *parameterfremstilling* av planet vårt.

Eksempel 9: Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (-1, 0, 2)$, $\mathbf{d} = (2, 3, -1)$ og $\mathbf{e} = (0, -2, 1)$. Sjekk deretter om punktet $(0, 7, 1)$ ligger i dette planet.

Vi lar $\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a}$ og $\mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{a}$. Da vil planet som går gjennom **a** og er utspent av **b** og **c**, være det planet vi jakter på (hvorfor?). Siden

$$\mathbf{b} = \mathbf{d} - \mathbf{a} = (2, 3, -1) - (-1, 0, 2) = (3, 3, -3)$$

og

$$\mathbf{c} = \mathbf{e} - \mathbf{a} = (0, -2, 1) - (-1, 0, 2) = (1, -2, -1)$$

får vi:

$$\mathbf{r}(s,t) = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = (-1, 0, 2) + s(3, 3, -3) + t(1, -2, -1)$$

$$= (-1 + 3s + t, 3s - 2t, 2 - 3s - t)$$

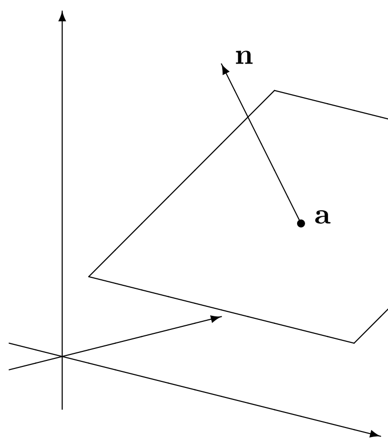
som er parameterfremstillingen.

Skal punktet $(0, 7, 1)$ ligge i planet, må det finnes tall s og t slik at $\mathbf{r}(s,t) = (0.7, 1)$, dvs,

$$-1 + 3s + t = 0 \quad \text{og} \quad 3s - 2t = 7 \quad \text{og} \quad 2 - 3s - t = 1$$

Løser vi de to første ligningene, får vi $s = 1,\ t = -2$. Setter vi disse to tallene inn i den tredje ligningen, ser vi at de stemmer. Det betyr at punktet ligger i planet (hadde paret $s = 1,\ t = -2$ ikke passet i den siste ligningen, ville punktet ikke ha ligget i planet). ♣

Det er en annen naturlig måte å beskrive et plan på. Vi oppgir et punkt $\mathbf{a}$ som planet skal gå gjennom, og en vektor $\mathbf{n}$ som står normalt på planet (se figur 10). Vi kaller $\mathbf{n}$ for en *normalvektor* til planet.



Figur 10: Planet gjennom **a** normalt på **n**

Dersom vi har et plan gjennom $\mathbf{a}$ utspent av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, er det lett å finne en normalvektor; vi setter simpelthen $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Av og til ønsker vi å gå den andre veien — vi kjenner en normalvektor $\mathbf{n}$ og ønsker å finne to vektorer $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ som utspenner planet. Det betyr at vi må finne to vektorer $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ som ikke er parallelle, og som begge står normalt på $\mathbf{n}$. Dersom $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$, vil en vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)$ stå normalt på $\mathbf{n}$ dersom $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_1 x + n_2 y + n_3 z = 0$.

Det er ikke vanskelig å finne løsninger av denne ligningen (gi pene verdier til to av variablene x, y og z og løs ligningen for den siste variabelen). Her er et eksempel:

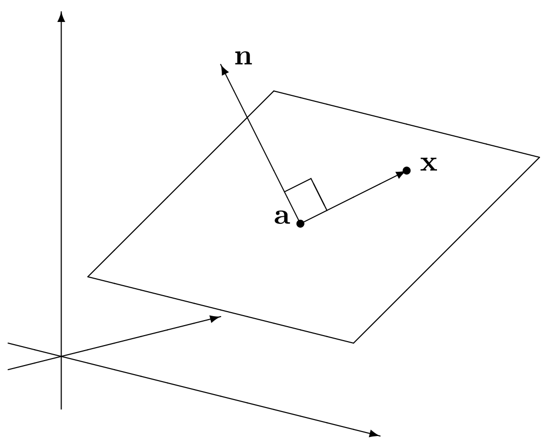
Eksempel 10: Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktet $\mathbf{a} = (1, -2, 3)$ og står normalt på vektoren $\mathbf{n} = (-4, 3, -1)$. For å finne vektorer $\mathbf{x} = (x, y, z)$ som står normalt på $\mathbf{n}$, løser vi ligningen

$$-4x + 3y - z = 0$$

Setter vi $x = 1$ og $y = 0$, ser vi at vi må ha $z = -4$. En løsning er derfor $\mathbf{b} = (1, 0, -4)$. Setter vi isteden $x = 0$ og $y = 1$, ser vi at vi må ha $z = 3$. En annen løsning er dermed $\mathbf{c} = (0, 1, 3)$. Nå kan vi finne en parameterfremstilling (mange andre er mulig):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s,t) = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} &= (1, -2, 3) + s(1, 0, -4) + t(0, 1, 3) \\ &= (1 + s, -2 + t, 3 - 4s + 3t) \qquad \clubsuit \end{aligned}$$

Som vi ser av dette eksemplet, krever det litt arbeid å finne parameterfremstillingen til et plan når vi kjenner en normalvektor $\mathbf{n}$ og et punkt $\mathbf{a}$ i planet. Det er en annen måte å beskrive et plan på som er vel så anvendelig i dette tilfellet: Vi begynner med å observere at de punktene som ligger i planet vårt, er nøyaktig de punktene $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ står normalt på vektoren $\mathbf{n}$, dvs. nøyaktig de punktene $\mathbf{x}$ slik at $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ (se figur 9).



Figur 9: **x** ligger i planet gjennom **a** normalt på **n**

Dersom $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ og $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, kan ligningen ovenfor skrives

$$0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = n_1 x + n_2 y + n_3 z - n_1 a_1 - n_2 a_2 - n_3 a_3$$

eller med andre ord

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3$$

Dette kaller vi *ligningen* til planet.

Eksempel 11: Finn ligningen til planet som går gjennom $\mathbf{a} = (-3, 1, 2)$ og står normalt på $\mathbf{n} = (-4, 2, -1)$. Undersøk om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i dette planet.

Vi skal finne alle vektorer $\mathbf{x} = (x, y, z)$ slik at $0 = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$, dvs.

$$0 = (-4, 2, -1) \cdot (x - (-3), y - 1, z - 2)$$

$$= (-4)(x + 3) + 2(y - 1) - 1(z - 2) = -4x + 2y - z - 12$$

Altså blir ligningen

$$-4x + 2y - z = 12$$

For å undersøke om punktet $(-2, 4, 3)$ ligger i planet, sjekker vi om det passer i ligningen. Setter vi inn på venstre side, får vi:

$$-4 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 - 3 = 13 \neq 12$$

som viser at punktet ikke ligger i planet. ♣

Vi kan snu prosedyren ovenfor på hodet. Gitt en ligning

$$ax + by + cz = d$$

vil alle løsningene (x, y, z) danne et plan med normalvektor (a, b, c). For å se hvilket plan det er snakk om, behøver vi bare finne én løsning (x_0, y_0, z_0) av ligningen $ax + by + cz = d$. La oss se på et eksempel.

Eksempel 12: Gi en geometrisk beskrivelse av løsningene til ligningen

$$-2x + y - 3z = 5$$

Dette er et plan med normalvektor $(-2, 1, -3)$. Velger vi $x = 1$ og $z = 0$, må vi ha $y = 7$. Vi har altså et plan gjennom $(1, 7, 0)$ med normalvektor $(-2, 1, 3)$. (Som en test kan du bruke metoden i forrige eksempel til å finne ligningen til planet gjennom $(1, 7, 0)$ normalt på $(-2, 1, 3)$ og se at du kommer tilbake til samme ligning.) ♣

Til slutt i dette avsnittet skal vi se på et spørsmål som ofte dukker opp: Gitt er punkt $\mathbf{x}$ og et plan P med ligning

$$ax + by + cz = d$$

Hva er avstanden fra punktet $\mathbf{x}$ til planet P? La oss først bli enige om at vi med dette mener avstanden fra $\mathbf{a}$ til det nærmeste punktet i planet P. Dette punktet finner vi ved å starte i $\mathbf{x}$ og følge normalen til planet inntil vi treffer planet. La oss formulere dette matematisk: Å starte i $\mathbf{x}$ og gå i retning normalt på planet, må bety å følge linjen gjennom $\mathbf{x}$ parallell med normalvektoren $\mathbf{n} = (a, b, c)$, altså linjen med parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{n}$. Dersom $\mathbf{x}$ har koordinatene (x_0, y_0, z_0), kan denne parameterfremstillingen skrives

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{n} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$$

Vi er interessert i det punktet der denne linjen skjærer planet P. Koordinatene til dette punktet må passe i ligningen til P, dvs. vi må ha:

$$a(x_0 + ta) + b(y_0 + tb) + c(z_0 + tc) = d$$

Løser vi denne ligningen for t, får vi

$$t = \frac{d - (ax_0 + by_0 + cz_0)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}$$

Avstanden vi er interessert i, er avstanden mellom skjæringspunktet $\mathbf{x} + t\mathbf{n}$ og det opprinnelige punktet $\mathbf{x}$. Denne avstanden blir

$$|(\mathbf{x} + t\mathbf{n}) - \mathbf{x}| = |t\mathbf{n}| = |t||\mathbf{n}|$$

$$= \frac{|d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}|}{|\mathbf{n}|^2}|\mathbf{n}| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|}$$

Bruker vi at $\mathbf{n} = (a, b, c)$ og $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$, ser vi at

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Vi har dermed vist følgende resultat:

Setning 3.8 *Avstanden fra punktet $\mathbf{x} = (x_0, y_0, z_0)$ til planet med ligning $ax + by + cz = d$ er*

$$\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} - d|}{|\mathbf{n}|} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

der $\mathbf{n} = (a, b, c)$ er normalvektoren.

Legg merke til at vi lett kan finne det punktet i planet som ligger nærmest $\mathbf{x}$. Setter vi uttrykket $t = \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2}$ inn i parameterfremstillingen, ser vi at dette punktet er gitt ved:

$$\mathbf{x} + t\mathbf{n} = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc) =$$

$$= (x_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2} a, y_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2} b, z_0 + \frac{d - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}}{|\mathbf{n}|^2} c)$$

Eksempel 13: Finn avstanden fra punktet $(3, 2, -4)$ til planet med ligning $-2x + y - 5x = 2$. Setter vi inn i formelen, ser vi at avstanden blir

$$\frac{|(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-5) \cdot (-4) - 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-5)^2}} = \frac{14}{\sqrt{30}} \qquad \clubsuit$$

Oppgaver til seksjon 3.4

1. Finn en parameterfremstilling for planet gjennom $(2, 1, 2)$ utspent av $(1, 2, 3)$ og $(-2, 3, 1)$. Avgjør om punktet $(-1, -2, -1)$ ligger i dette planet.

2. Finn en parameterfremstilling for planet gjennom $(3, 0, -2)$ utspent av $(-1, 3, 2)$ og $(-5, 0, 1)$. Avgjør om punktet $(-6, -3, -2)$ ligger i dette planet.

3. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $(3, -1, 2)$, $(4, 1, 1)$ og $(-2, -1, 1)$.

4. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom punktene $(0, 3, 1)$, $(2, -3, 1))$ og $(-2, 1, 1)$. Avgjør om punktet $(1, 2, 1)$ ligger i dette planet.

5. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom $(-1, 2, 2)$ og står normalt på $(2, 1, 2)$.

6. Finn en parameterfremstilling for planet som går gjennom $(3, 0, 3)$ og står normalt på $(1, 3, 1)$.

7. Finn en ligning for planet som går gjennom $(3, 1, -1)$ og står normalt på $(4, -1, 1)$.

8. Undersøk om punktene $(1, -1, 1)$ og $(2, -1, 4)$ ligger i planet $x - 3y + 2z = 6$.

9. Finn en normalvektor til planet $2x - 3y + z = 4$. Finn også et punkt som ligger i planet.

10. Finn en ligning for planet som går gjennom $(0, 1, -2)$ og står normalt på $(3, 1, 2)$.

11. Finn en ligning for planet som har parameterfremstilling $\mathbf{r}(t) = (-2 + 3s - t, 1 + s - 2t, 2 + s + 5t)$.

12. Finn avstanden fra punktet $(2, -1, 2)$ til planet $2x - y + 3z = 4$.

13. Finn avstanden fra punktet $(3, 4, 0)$ til planet $-x + 2y + z = 2$.

14. Finn avstanden fra punktet $(1, 1, 1)$ til planet som går gjennom $(1, 0, 3)$ og står normalt på $(6, -2, 3)$.

15. Finn avstanden fra punktet $(2, 2, 3)$ til planet med parameterfremstilling $\mathbf{r}(s, t) = (-1 + s + t, 2 + s - t, 2 + 3s - 2t)$.

16. Planene $x - y + z = 2$ og $2x + y - z = 4$ skjærer hverandre i en rett linje. Finn en parameterfremstilling for denne linjen.

17. K er kulen med sentrum i origo og radius 3. Finn formelen for planet som tangerer K i punktet $(2, 2, 1)$.

18. Et plan består av alle punkter som ligger like langt fra punktet $(2, 4, 2)$ som fra $(-2, 0, 8)$. Finn ligningen til planet.

19. Planet P har ligningen $x + y + z = 1$. Punktene (a, b, c) og (a', b', c') er speilbilder av hverandre om planet P. Finn a', b' og c' uttrykt ved a, b og c.

20. (Eksamen i MA 104, 29/5-1995) La P være planet som går gjennom punktet (1,0,1) og som er parallelt med vektorene (1,1,0) og (0,1,1).

a) Finn en ligning for P.

b) La l_1 være linjen som går gjennom origo og punktet (1,0,1), og la l_2 være linjen i P som står normalt på l_1. Finn en parameterfremstilling for l_2.

c) Finn avstanden fra l_2 til y-aksen (dvs. den korteste avstanden fra et punkt på l_2 til et punkt på y-aksen).

21. (Eksamen i MA 104, 14/5-1988). La planet P være gitt av ligningen

$$2x + 3y - 2z = 7$$

La l være linjen gitt ved parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(t) = (2t, 3t, 2t)$$

a) Bestem skjæringspunktet mellom P og l og finn den minste vinkelen θ vi kan ha mellom l og en linje i P som skjærer l,

b) Bestem avstanden fra P til origo.

22. (Eksamen i MA 104, 30/5-1984) La P_s være planet som går gjennom de tre punktene $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$ og $(1, 2, s)$, der s er et reelt tall.

a) Finn ligningen til P_s.

b) For hvilken verdi av s går P_s også gjennom punktet $Q = (2, 3, 4)$? For denne verdien av s skal man finne den vinkelen som P_s danner med planet som har ligningen $2x - y - z = 0$. (Vinkelen mellom to plan er det samme som vinkelen mellom normalvektorene deres).

c) Finn avstanden fra punktet $Q = (2, 3, 4)$ til planet med ligning $2x-y-z = 0$.

d) Hvilket plan er det P_s nærmer seg når s går mot uendelig?

3.5 Parametriserte kurver

En *parametrisert kurve* i rommet er et uttrykk

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

der x, y og z er kontinuerlige funksjoner. Ofte lønner det seg å tenke på $\mathbf{r}(t)$ som posisjonen til en gjenstand ved tiden t.

Eksempel 14: Vi setter

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

Denne kurven ser ut som en spiralfjær. Hadde vi bare hatt de to første koordinatene, ville kurven ha beskrevet en sirkulær bevegelse i planet, men den tredje koordinaten trekker kurven oppover i en spiralbevegelse. Prøv å finne ut hvordan kurven ser ut og tegn en skisse av den. ♣

Parametriserte kurver i rommet oppfører seg omtrent som de parametriserte kurvene i planet som vi studerte i forrige kapittel. Vi skal derfor gå raskt gjennom de grunnleggende definisjonene og resultatene uten så mange forklaringer og bevis.

Definisjon 3.9 A*nta at funksjonene x, y og z har kontinuerlige deriverte.* Buelengden *av den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ fra a til b er*

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

Eksempel 15: La oss bruke formelen ovenfor til å regne ut lengden til en omdreining av spiralen i eksempel 14. Vi har

$$x'(t) = -\sin t \qquad y'(t) = \cos t \qquad z'(t) = 1$$

Dette gir

$$L(0, 2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi$$ ♣

Definisjon 3.10 *Anta at funksjonene x, y og z er deriverbare. Den* deriverte *til den parametriserte kurven $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ved tiden t er*

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

I situasjoner der $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen til en gjenstand ved tiden t, kaller vi $\mathbf{v}(t)$ for hastigheten *til gjenstanden.*

Som i det to-dimensjonale tilfellet definerer vi *farten* $v(t)$ til å være den deriverte av buelengdefunksjonen $s(t) = L(a,t)$. Vi har $v(t) = |\mathbf{v}(t)|$ som før.

Regnereglene for derivasjon er akkurat som i det to-dimensjonale tilfellet, men vi får med en regel til for den deriverte av vektorproduktet (punkt (iv) nedenfor):

Setning 3.11 *Dersom* $\mathbf{r}_1(t)$ *og* $\mathbf{r}_2(t)$ *er to deriverbare parametriserte kurver, gjelder:*
(i) $(\mathbf{r}_1(t) + \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) + \mathbf{r}_2'(t)$
(ii) $(\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) - \mathbf{r}_2'(t)$
(iii) $(\mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \cdot \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \cdot \mathbf{r}_2'(t)$
(iv) $(\mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}_1'(t) \times \mathbf{r}_2(t) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2'(t)$
(v) Dersom $\mathbf{r}(t)$ *er en deriverbar parametrisert kurve og* $u(t)$ *er en deriverbar funksjon, er* $(u(t)\mathbf{r}(t))' = u'(t)(t) \cdot \mathbf{r}(t) + u(t) \cdot \mathbf{r}'(t)$

Den *dobbeltderiverte* $\mathbf{a}(t)$ er definert ved

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

Dersom $\mathbf{r}(t)$ representerer posisjonen ved tiden t, kaller vi $\mathbf{a}(t)$ for *akselerasjonen*. Med *baneakselerasjonen* $a(t)$ mener vi den deriverte av farten $v(t)$.

Eksempel 16: Vi regner ut hastighet, fart, akselerasjon og baneakselerasjon for kurven i eksempel 14:

$$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

Dette gir $v(t) = |\mathbf{v}(t)| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Siden $v(t)$ er konstant, blir $a(t) = v'(t) = 0$. Videre er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \qquad \clubsuit$$

Dersom $v(t) \neq 0$, definerer vi *enhetstangentvektoren* ved $\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$. Ved å regne på samme måte som i det to-dimensjonale tilfellet, får vi:

Setning 3.12 *Dersom* $\mathbf{v}(t) \neq \mathbf{0}$, *kan akselerasjonen* $\mathbf{a}(t)$ *dekomponeres i to ortogonale vektorer*

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{T}(t) + v(t)\mathbf{T}'(t)$$

der $a(t)\mathbf{T}(t)$ *er parallell med tangenten og* $v(t)\mathbf{T}'(t)$ *står normalt på tangenten.*

En viktig forskjell på to og tre dimensjoner er at det i tre dimensjoner finnes mange flere normalvektorer. Gitt en vektor $\mathbf{c}$ i planet, finnes det essentielt sett bare én normalretning (mer presist: alle normalvektorer til $\mathbf{c}$ i planet er parallelle). I rommet finnes det derimot et helt plan av vektorer som står normalt på en gitt vektor $\mathbf{c}$. Når vi snakker om en normalvektor i rommet, er det derfor viktig å vite hvilken normalvektor vi mener. Dersom $\mathbf{r}(t)$ er en parametrisert kurve i rommet, kaller vi $\mathbf{T}'(t)$ for *hovednormalen* til $\mathbf{r}(t)$. Tangentvektoren $\mathbf{T}(t)$ og hovednormalen $\mathbf{T}'(t)$ utspenner et plan gjennom punktet $\mathbf{r}(t)$. Dette planet kalles *smygplanet* til kurven i $\mathbf{r}(t)$. Dette er planet som smyger seg tettes opp til kurven i punktet $\mathbf{r}(t)$.

Maplekommentar: Du kan få Maple til å tegne parametriserte romkurver for deg ved hjelp av kommandoen `spacecurve`, men det forutsetter at du først har lastet inn biblioteket **plots**. Vil du se en tegning av kurven $\mathbf{r}(t) = (t, \sin t, \cos t)$ for $-2 \leq t \leq 4$, taster du

```
spacecurve([t, sin(t), cos(t),t=-2..4]);
```

Det er vanskelig å tegne gode, tredimensjonale figurer, og det er ikke alltid at de figurene som Maple presterer, er så lette å tolke. Se kapittel 19 i *Getting Started with Maple* for noen triks.

Oppgaver til seksjon 3.5

1. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (t, e^{-t}, \sin t)$.

2. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (\ln t, t^2, \cos t)$.

3. Vi har $\mathbf{r}(t) = (2\cos t, \sqrt{2}\sin t, \sqrt{2}\sin t)$.

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Finn buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

c) Vis at kurven ligger på en kuleflate med sentrum i origo.

d) Vis at kurven ligger i planet $y - z = 0$.

e) Hva slags kurve fremstiller $\mathbf{r}$?

4. Vi har $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Vis at buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$ er $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt$. Bruk numerisk integrasjon til å beregne dette integralet.

c) Løs integralet i b) ved regning. Bruk substitusjonen $t = \frac{e^u - e^{-u}}{\sqrt{2}}$.

5. En partikkel beveger seg i et kraftfelt der kraften hele tiden er rettet mot eller fra origo (dette gjelder blant annet partikler i et gravitasjonsfelt eller et elektrisk felt der massen eller ladningen er konsentrert i origo). Ifølge Newtons annen lov er $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, så akselerasjonen er også rettet mot eller fra origo, Det betyr at akselerasjonen ved tiden t er gitt ved $\mathbf{a}(t) = k(t)\mathbf{r}(t)$ der $k(t)$ er en skalar størrelse.

a) Vis at $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)] = 0$.

b) Forklar hvorfor $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er en konstant vektor (uavhengig av t).

c) Vis at partikkelen hele tiden beveger seg i planet gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{r}(0)$ og $\mathbf{v}(0)$.

6. (Eksamen i MA 105, 24/5-1991) En vei er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{9}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t}{9}\mathbf{k} \qquad 1 \leq t \leq 7$$

(alle avstander er målt i kilometer). En bil som kjører langs veien har et bensinforbruk som avhenger av hvor bratt veien er — den bruker $\frac{1}{15} + \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}$ liter per klometer (s er buelengden). Finn det totale bensinforbruket.

Kapittel 4

Geometri i høyere dimensjoner

Vi begynte dette heftet med å studere n-tupler for et vilkårlig naturlig tall n. Deretter så vi at når $n = 2$ eller $n = 3$, kan vi tolke disse n-tuplene som geometriske objekter (vektorer og punkter) i planet og rommet. Denne geometriske tolkningen tillater oss å tenke på 2- og 3-tupler på en ny måte som gir opphav til nye problemstillinger og nye løsningsmetoder. Det er fristende å forsøke å trekke med seg denne geometriske tenkemåten til det generelle tilfellet.

Dette kan virke som en uoverkommelig oppgave — hvis 2-tupler representerer 2-dimensjonale objekter i planet, og 3-tupler representerer 3-dimensjonale objekter i rommet, så burde 4-tupler representere 4-dimensjonale objekter i et slags 4-dimensjonalt rom? Og, enda verre, 5-tupler burde representere 5-dimensjonale objekter i et 5-dimensjonalt rom, 6-tupler 6-dimensjonale objekter i et 6-dimensjonalt rom osv? Hvem av oss kan med hånden på hjertet si at de har noen særlig geometrisk intuisjon for det som skjer i 4-, 5- og 6-dimensjonale rom?

Heldigvis behøver vi ikke å ha en slik intuisjon på forhånd, men kan bygge den opp gradvis. Hensikten med dette kapittelet er å gi en liten forsmak på hvordan dette gjøres. Ideen er enkel: vi overfører geometriske begreper fra planet og rommet til det generelle tilfellet ved å bruke de algebraiske beskrivelsene av geometriske egenskaper. Her er et eksempel: At to vektorer $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale, er i utgangspunktet en geometrisk egenskap. Denne egenskapen kan vi beskrive algebraisk ved $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Vi bruker nå denne algebraiske beskrivelsen til å *definere* at to n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er ortogonale dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. På denne måten får vi innført det geometriske begrepet ortogonalitet i høyere dimensjoner uten å måtte støtte oss til noen geometrisk intuisjon. Når begrepet først er innført på denne måten, kan vi undersøke i hvilken grad det svarer til våre (geometriske) forestillinger om hva ortogonalitet er. På den måten bygger vi etterhvert opp en intuisjon om hva ortogonalitet av n-tupler er, og denne intuisjonen tar fort en geometrisk form.

Som allerede antydet, skal vi ikke gjøre så altfor mye ut av dette prosjektet i dette heftet, men en liten smakebit kan være nyttig. La oss begynne med litt terminologi: Mengden $\mathbf{R}^n$ av alle n-tupler kalles det *n-dimensjonale euklidske rommet*, og et n-tuppel kalles også en *n-dimensjonal vektor* eller et *n-dimensjonalt punkt* (som i 2 og 3 dimensjoner lønner det seg noen ganger å tenke på et n-tuppel som en vektor og andre ganger som et punkt).

Hvis $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ er en to-dimensjonal vektor, er lengden gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Tilsvarende er lengden til en tre-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ gitt ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

For en n-dimensjonal vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er det derfor naturlig å definere *lengden* (eller *normen* som den også kalles) ved

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

I kapittel 1 definerte vi skalarproduktet av vektorene $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ til å være

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Vi har den vanlige sammenhengen mellom lengden og skalarproduktet

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \qquad \text{eller med andre ord} \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$$

Vi har allerede definert to n-tupler $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ til å være *ortogonale* (eller *stå normalt på hverandre*) dersom $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Ved hjelp av denne definisjonen kan vi formulere en n-dimensjonal versjon av et meget berømt resultat.

Setning 4.1 (Pythagoras' setning for n-tupler) *Dersom* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *er ortogonale, så er*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$$

Bevis: Dette er bare et enkelt regnestykke (husk regnereglene for n-tupler fra kapittel 1):

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + 2\,\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|^2 + 2 \cdot 0 + |\mathbf{b}|^2$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 \qquad \spadesuit$$

Vi husker fra to og tre dimensjoner at $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. Dette resultatet er en umiddelbar konsekvens av den geometriske tolkningen av skalarproduktet $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$ (husk at $|\cos v| \leq 1$). Vi skal nå vise det tilsvarende resultatet for n-dimensjonale vektorer, men denne gangen må vi gå frem på en annen måte siden vi ikke har noen geometrisk tolkning av skalarproduktet i n dimensjoner.

Setning 4.2 (Schwarz' ulikhet) *For alle n-dimensjonale vektorer gjelder*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$$

Bevis: Dette er et triks. Vi observerer først at hvis $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, så er påstanden i setningen opplagt riktig. Vi kan derfor anta at $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ i det som følger. Hvis vektorene våre har koordinater $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, observerer vi først at for ethvert reelt tall x er

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2$$

siden et kvadrat aldri kan være negativt. Hvis vi multipliserer ut alle kvadratene og samler ledd av samme type, får vi

$$0 \leq |\mathbf{a}|^2 x^2 + 2x\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2$$

Fullfører vi kvadratet på høyre side, ser vi at

$$0 \leq |\mathbf{a}|^2 x^2 + 2x\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}|x + \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|})^2 + |\mathbf{b}|^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2}$$

Velger vi nå $x = -\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}$, får vi ulikheten

$$0 \leq |\mathbf{b}|^2 - \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}{|\mathbf{a}|^2}$$

Følgelig er $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 \leq |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$ og setningen følger. ♠

Med utgangspunkt i Schwarz' ulikhet kan vi nå definere vinkelen mellom to n-dimensjonale vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ slik at vår kjære formel $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$ fortsatt gjelder:

Definisjon 4.3 *Med* vinkelen mellom to n-dimensjonale vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *mener vi den vinkelen $v \in [0°, 180°]$ slik at* $\cos v = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$

Legg merke til at siden Schwarz' ulikhet garanterer at $-1 \leq \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leq 1$, så finnes det alltid en slik vinkel v som definisjonen forutsetter. Vi ser også at vi får $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos v$.

Hva er så vitsen med et slikt abstrakt og merkelig vinkelbegrep? Kan disse vinklene brukes til noe, og oppfører de seg som de vinklene vi er vant til fra planet og rommet? Dette er fornuftige spørsmål som bare erfaring kan gi svar på. Erfaringen sier at disse vinklene fungerer utmerket, og at de i det store og hele har de samme egenskapene som vinkler i 2 og 3 dimensjoner. La oss ta med et eksempel på hvordan man finner en vinkel:

Eksempel 1: Finn vinkelen mellom vektorene $\mathbf{a} = (2, -1, 0, 1, 1)$ og $\mathbf{b} = (0, 1, 3, -2, 0)$. Vi har

$$\cos v = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} =$$

$$= \frac{(2, -1, 0, 1, 1) \cdot (0, 1, 3, -2, 0)}{|(2, -1, 0, 1, 1)||(0, 1, 3, -2, 0)|} = \frac{-3}{\sqrt{7}\sqrt{14}} = \frac{-3\sqrt{2}}{14}$$

Bruker vi en lommeregner, finner vi at $\frac{-3\sqrt{2}}{14} \approx -0.3030$. Dette gir $v \approx \arccos(-0.3030) \approx 107.6°$. ♣

Et viktig resultat i planet og rommet er trekantulikheten som sier at $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$. Ved hjelp av Schwarz' ulikhet skal vi nå vise at denne ulikheten også gjelder i n dimensjoner.

Setning 4.4 (Trekantulikheten) *For alle n-dimensjonale vektorer* **a**, **b** *gjelder*

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$$

Bevis: Vi har

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

$$= |\mathbf{a}|^2 + 2\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2 \leq |\mathbf{a}|^2 + 2\ |\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2$$

der vi har brukt at ifølge Schwarz' ulikhet er $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$. ♠

Geometrisk sier trekantulikheten at lengden til den ene siden i en trekant alltid er mindre enn summen av de to andre sidene. Resultatet ovenfor forteller oss at dette også gjelder i høyere dimensjoner. Faktisk spiller trekantulikheten en nøkkelrolle i de fleste forsøk på å generalisere avstandsbegrepet til nye sammenhenger.

Parametriserte linjer og kurver er også enkle å generalisere til n dimensjoner. En *parametrisert linje* i $\mathbf{R}^n$ består av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

der **a** og **b** er to faste vektorer i $\mathbf{R}^n$ og der t gjennomløper $\mathbf{R}$. En *parametrisert kurve* i $\mathbf{R}^n$ består av alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$$

der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er kontinuerlige funksjoner. *Buelengden* til en slik funksjon fra a til b er definert ved

$$L(a,b) = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + \cdots + x_n'(t)^2}\, dt$$

forutsatt at funksjonene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er deriverbare. Den deriverte og annenderiverte til kurven $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ er som ventet

$$\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$$

og

$$\mathbf{r}''(t) = (x_1''(t), x_2''(t), \ldots, x_n''(t))$$

Vi skriver ofte $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ og $\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t)$ og kaller disse størrelsene for hastigheten og akselerasjonen.

Hva kan en parametrisert kurve i n dimensjoner brukes til? Her er et lite eksempel: Anta at vi er interessert i n vareslag og at $x_i(t)$ er prisen til det i-te vareslaget ved tiden t. Da gir $\mathbf{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ en samlet fremstilling av prisutviklingen. Den deriverte funksjonen $\mathbf{r}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$ gir en samlet fremstilling av hvor mye prisene stiger og synker.

Plan kan også generaliseres til det n-dimensjonale tilfellet, men her er det flere muligheter. Gitt et punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ og k vektorer $\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k \in \mathbf{R}^n$, sier vi at alle punkter på formen

$$\mathbf{r}(t_1, t_2, \ldots, t_k) = \mathbf{a} + t_1\mathbf{b}_1 + t_2\mathbf{b}_2 \cdots + \ t_k\mathbf{b}_k$$

der $t_1,\ t_2, \ldots,\ t_k \in \mathbf{R}$, danner et *$k$-dimensjonalt plan* i $\mathbf{R}^n$. Legg merke til at et en-dimensjonalt plan ikke er noe annet enn en parametrisert linje. Dersom $k = n-1$, kalles planet ovenfor et *hyperplan*. Hyperplan kan også fremstilles på en annen måte: Gitt et punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ og en vektor $\mathbf{n} \in \mathbf{R}^n$. Da vil mengden av alle vektorer $\mathbf{x}$ slik at $\mathbf{x} - \mathbf{a}$ står normalt på $\mathbf{n}$, være et hyperplan. Vi kaller dette *hyperplanet gjennom* $\mathbf{a}$ *normalt på* $\mathbf{n}$.

Vi ser at begrepet *plan* er mer komplisert (eller i hvert fall mer mangesidig) i n dimensjoner enn i tre. Dette er et ganske vanlig fenomen når vi generaliserer tre-dimensjonale fenomener til høyere dimensjoner — begreper som faller sammen i tre dimensjoner, kan ha forskjellig innhold i høyere dimensjoner.

Som en siste smakebit på hvordan geometriske sammenhenger kan generaliseres til n dimensjoner, skal vi ta en titt på hvordan vi kan generalisere begrepene determinant, areal og orientering. Gitt fire vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$, $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4)$, $\mathbf{d} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ i $\mathbf{R}^4$, definerer vi 4×4-*determinanten* $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ ved

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} =$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 & b_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

Sammenligner du denne definisjonen med definisjonen av 3×3-determinanter, vil du oppdage det generelle mønsteret som gjør at vi kan gå videre og definere 5×5-determinanter, 6×6-determinanter osv.

Vi har tidligere sett at *tallverdien* til 2×2-determinanten $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gir oss arealet utspent av vektorene $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, mens *fortegnet* til determinanten forteller oss om orienteringen til paret $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. På tilsvarende vis vet vi at tallverdien til en 3×3-determinant $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ gir oss volumet utspent av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, mens fortegnet forteller oss om orienteringen til trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Vi kan bruke disse observasjonene til å definere volum og orientering i høyere dimensjoner. Gitt n vektorer $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_n$ definerer vi *volumet utspent av disse vektorene* til å være tallverdien til $n \times n$-determinanten $\det(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Vi sier at n-tuppelet $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ (legg merke til at dette er et n-tuppel av vektorer) er *positivt* (henholdsvis *negativt*) orientert dersom determinanten er positiv (henholdvis negativ).

Slike definisjoner kan virke spekulative, og de må alltid testes før de tas i bruk. Vi må undersøke om de oppfyller våre intuitive forestillinger om hva volum og orientering skal være, og vi må sjekke om de generaliserer de formlene og resultatene vi har i to og tre dimensjoner på en naturlig og fruktbar måte. Det viser seg at definisjonene ovenfor består disse testene og at de gir en "riktig" generalisering av begrepene volum og orientering.

Vi skal runde av her. Dette siste kapittelet kan virke litt løst og overfladisk, men hensikten har først og fremst vært å formidle en måte å tenke på som det kan være greit å være klar over før man går videre med studiet av lineær algebra (som er navnet på den mer avanserte teorien for n-dimensjonale vektorer).

Oppgaver til kapittel 4

1. Regn ut vinkelen mellom $(-1, 2, 6, 2, 4)$ og $(1, 0, 3, 1, 1)$.

2. Finn hastigheten og akselerasjonen til $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, \cos t, \ln t)$.

3. Regn ut $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

4. Vis at for $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, gjelder:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + 2\, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2$$

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2 = |\mathbf{x}|^2 - 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + |\mathbf{y}|^2$$
$$(\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 - |\mathbf{y}|^2$$

5. Et hyperplan går gjennom punktet $(-1, 0, 2, 3)$ og står normalt på $(-1, 2, 1, 3)$. Finn en ligning for de punktene (x, y, z, w) som ligger i hyperplanet.

6. Anta at $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er to ikke-null vektorer i $\mathbf{R}^n$. Vis at $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ hvis og bare hvis $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ er parallelle (dvs. $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$ for en skalar k). Hint: Analyser beviset for Schwartz' ulikhet.

Fasit

Kapittel 1

Oppgave 1 $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (-2,3,9,-5,-2)$, $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (4,-7,-1,-5,4)$, $s\mathbf{a} = (3,-6,12,-15,3)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 4$
Oppgave 2: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (7,2,5,-8,-5,3)$, $\mathbf{a}-\mathbf{b} = (7,-2,3,4,-5,5)$, $s\mathbf{a} = (-28,0,-16,8,20,-16)$, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 12$

Kapittel 2

Seksjon 2.1

Oppgave 2: Punktene ligger på en rett linje.
Oppgave 3: Punktene danner hjørnene i et kvadrat.
Oppgave 4: $\sqrt{290}$
Oppgave 5: Svømmeretningen bør danne 30° med den rette linjen tvers over elven. Tid $\frac{50}{\sqrt{3}}$ sekunder.

Seksjon 2.2:

Oppgave 1: $\theta \approx 109.65^\circ$
Oppgave 2: $10\sqrt{2}$
Oppgave 3: $\theta \approx 71.57^\circ$, $\mathbf{p} = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
Oppgave 4: $\sqrt{5}$
Oppgave 5: 30° og 45°, $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
Oppgave 6: $(4,3) = (2,4) + (2,-1)$
Oppgave 7: $-\frac{43}{2}$ (bruk at $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{ab} + |\mathbf{b}|^2$).
Oppgave 8: 90°
Oppgave 9: Umulig pga. trekantulikheten.
Oppgave 10: Umulig pga. trekantulikheten; sidekanten $\mathbf{a}$ er lenger enn summen av de to andre $\mathbf{a}-\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$.
Oppgave 14: Bruk Pythagoras' setning på den store rettvinklede trekanten.

Seksjon 2.3

Oppgave 1: $\mathbf{r}(t) = (-3 + t, -2 - 2t)$. Punktet $(-7, 6)$ ligger på linjen.
Oppgave 2: $\mathbf{r}(t) = (2 + t, -1 + 9t)$
Oppgave 3: For eksempel $\mathbf{r}(t) = (5+2t, -2+t)$ (det er mange muligheter)
Oppgave 4: For eksempel $\mathbf{r}(t) = (3t, 2 - 2t)$ (det er mange muligheter)
Oppgave 5: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
Oppgave 6: $(\frac{18}{5}, \frac{11}{5})$
Oppgave 7: $2\sqrt{5}$
Oppgave 8: $(\frac{153}{25}, -\frac{46}{25})$
Oppgave 9: c) $(3, 4)$
Oppgave 11: a) Skjæringspunkt $(15, 24)$.
b) Skipene kolliderer ikke.
Oppgave 12: c) ca. $49°$.

Seksjon 2.4

Oppgave 1: a) 14 b) 38 c) 0
Oppgave 2: 11
Oppgave 3: $\frac{23}{2}$
Oppgave 4: 27
Oppgave 5: a) positivt b) negativt
Oppgave 6: Hint: Tolk determinanten som et areal.
Oppgave 8: Hint: Utrykk arealet som en determinant
Oppgave 9: b) Ligningssystemet har enten ingen eller uendelig mange løsninger avhengig av konstantene c_1 og c_2. Linjene $a_1x + b_1y = c_1$ og $a_2x + b_2y = c_2$ er nemlig enten parallelle (ingen løsninger) eller sammenfallende (uendelig mange løsninger).

Seksjon 2.5

Oppgave 1:
$\mathbf{v}(t) = (3t^2, 2t)$
$v(t) = t\sqrt{9t^2 + 4}$
$\mathbf{a}(t) = (6t, 2)$
$a(t) = \frac{18t^2+4}{\sqrt{9t^2+4}}$

Oppgave 2:
$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \sin t + t\cos t)$
$v(t) = \sqrt{2\sin^2 t + t\sin 2t + t^2\cos^2 t}$
$\mathbf{a}(t) = (-\cos t, 2\cos t - t\sin t)$
$a(t) = \frac{(3-t^2)\sin 2t + 2t(\cos 2t + \cos^2 t)}{2\sqrt{\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2}}$

Oppgave 3:
b) $\mathbf{v}(t) = (-a\sin t, b\cos t)$

$v(t) = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}$
$\mathbf{a}(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\mathbf{r}(t)$
$a(t) = \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$
c) $s \approx 25.53$

Oppgave 4: $\frac{904^{3/2}-8}{27} \approx 1006.4$

Oppgave 5:
a) $\mathbf{v}(t) = (1, -\tan t)$
$v(t) = \frac{1}{\cos t}$
b) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1)$

Oppgave 6:
a) $\mathbf{v}(t) = (r(1-\cos t), r\sin t)$
$v(t) = r\sqrt{2}\sqrt{1-\cos t}$
$\mathbf{a}(t) = (r\sin t, r\cos t)$
$a(t) = \frac{r\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}$
d) $8r$

Oppgave 9:
a) $\mathbf{v}(t) = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt)$
$\mathbf{a}(t) = (0, -g)$
b) $\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$
c) $\frac{v_0^2}{g}$

Oppgave 10:
$t = \frac{m}{k}\ln(1 + \frac{ku_2}{mg})$
$y_{max} = \frac{mu_2}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\ln(1 + \frac{ku_2}{mg})$

Oppgave 11:
b) $\mathbf{r}_2(t) = (t + \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}})$

Oppgave 12: Med origo midt i sirkelen og med startpunkt $(b,0)$, får vi:
$x(t) = (a+b)\cos t - a\cos(\frac{a+b}{a}t)$
$y(t) = (a+b)\sin t - a\sin(\frac{a+b}{a}t)$

Oppgave 13:
a) $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Finn uttrykket for $f'(t)$ ved å derivere $f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$ etter produktregelen.
b) Geometrisk beskrivelse: Vektoren fra $\mathbf{b}$ til $\mathbf{r}(t_0)$ står normalt på tangentvektoren $\mathbf{r}'(t_0)$.
c) Dersom $y > \frac{1}{2}$, så er $(\pm\sqrt{y - \frac{1}{2}}, y - \frac{1}{2})$ de nærmeste punktene. Dersom $y \leq \frac{1}{2}$, så er $\mathbf{0} = (0,0)$ det nærmeste punktet.

Kapittel 3

Seksjon 3.1

Oppgave 1: $(\frac{19}{6}, -\frac{19}{6}, \frac{19}{3})$
Oppgave 2: $\frac{1}{\sqrt{6}}$
Oppgave 3: ca. $67.8°$
Oppgave 4: $(2,2,1) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}) + (\frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2})$
Oppgave 5: $\mathbf{r}(t) = (-1+2t, -1+3t, 2+t)$
Oppgave 6: $\mathbf{r}(t) = (7-8t, -3+2t, 2+3t)$
Oppgave 7: Utallige muligheter, f.eks. $(1,0,3)$ og $(0,1,2)$. Sjekk dine svar ved å ta skalarproduktet med $(3,2,-1)$.
Oppgave 8: $(0,2,-1)$
Oppgave 10:
a) Ja, kursene til flyene krysser hverandre i punktet $(4000, 4000, 4000)$.
b) Nei, flyene kolliderere ikke. De kommer til møtestedet etter henholdsvis 40 sekunder og $\frac{100}{3}$ sekunder.

Seksjon 3.2

Oppgave 1: a) $(19,3,5)$ b) $(-1,-6,-14)$
Oppgave 2: $6\sqrt{5}$
Oppgave 3: $\sqrt{3}$
Oppgave 4: $(9,-5,6)$
Oppgave 5: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
Oppgave 6: 0
Oppgave 7: $\frac{7}{2}$
Oppgave 8: Hint: Bruk determinanten.

Seksjon 3.3

Oppgave 1: a) 84 b) 20 c) 0
Oppgave 2: 7
Oppgave 3: $\frac{5}{3}$
Oppgave 4: Positivt
Oppgave 6: Hint: Tolk determinanten som et volum.

Seksjon 3.4

Oppgave 1: $\mathbf{r}(s,t) = (2+s-2t, 1+2s+3t, 2+3s+t)$
Nei, punktet ligger ikke i planet.
Oppgave 2: $\mathbf{r}(s,t) = (3-s-5t, 3s, -2+2s+t)$. Punktet ligger i planet.
Oppgave 3: $\mathbf{r}(s,t) = (3+s-5t, -1+2s, 2-s-t)$
Oppgave 4: For eksempel $\mathbf{r}(s,t) = (2s-2t, 3-6s-2t, 1)$, men det finnes også mange andre. Punktet $(1,2,1)$ ligger i planet.
Oppgave 5: $\mathbf{r}(s,t) = (-1+s, 2+2t, 2-s-t)$

Oppgave 6: $\mathbf{r}(s,t) = (3+s+3t, -t, 3-s)$
Oppgave 7: $\mathbf{r}(s,t) = (3+t, 1+s+4t, -1+s)$
Oppgave 8: Punktet $(1,-1,1)$ ligger i planet, men punktet $(2,-1,4)$ gjør det ikke.
Oppgave 9: $\mathbf{n} = (2,-1,3)$. Ett slikt punkt er $(0,0,4)$
Oppgave 10: $3x+y+2z=-3$
Oppgave 11: $7x-16y-5z=-40$
Oppgave 12: $\frac{\sqrt{14}}{2}$
Oppgave 13: $\frac{\sqrt{6}}{2}$
Oppgave 14: $\frac{8}{7}$
Oppgave 15: $\frac{\sqrt{30}}{30}$
Oppgave 16: $\mathbf{r}(t) = (2,t,t)$
Oppgave 17: $2x+2y+z=9$
Oppgave 18: $2x+2y-3z=-11$
Oppgave 19 $a' = \frac{1}{3}(a+2-2b-2c)$, $b' = \frac{1}{3}(b+2-2a-2c)$, $c' = \frac{1}{3}(c+2-2a-2b)$

Oppgave 20:
a) $x-y+z=2$
b) $\mathbf{r}(t) = (2-t, 0, t)$
c) $\sqrt{2}$

Oppgave 21:
a) $\frac{7}{9}(2,3,2)$, $\theta = \arcsin\frac{9}{17}$
b) $\frac{7}{17}\sqrt{17}$

Oppgave 22:
a) $(s-2)x+(1-s)y+z=0$
b) $s=3$, $\theta = \frac{\pi}{3}$
c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
d) $x-y=0$

Seksjon 3.5

Oppgave 1:
$\mathbf{v}(t) = (1, -e^{-t}, \cos t)$
$\mathbf{a}(t) = (0, e^{-t}, -\sin t)$

Oppgave 2:
$\mathbf{v}(t) = (\frac{1}{t}, 2t, -\sin t)$
$\mathbf{a}(t) = (-\frac{1}{t^2}, 2, -\cos t)$

Oppgave 3: a) $\mathbf{v}(t) = (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)$
$v(t) = 2$
$\mathbf{a}(t) = -\mathbf{r}(t)$
b) 4π

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
e) En sirkel med radius 2 om origo i planet y-z=0.

Oppgave 4:
a) $\mathbf{v}(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$
$v(t) = \sqrt{2 + t^2}$
b) 22.43
c) $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(\sqrt{2}\pi + \sqrt{2\pi^2 + 1})$

Oppgave 6: $\frac{89}{45}$ liter

Kapittel 4

Seksjon 4.1
Oppgave 1: ca. 31.8°.
Oppgave 2: $\mathbf{v}(t) = (1, 2t, -\sin t, \frac{1}{t})$
$\mathbf{a}(t) = (0, 2, -\cos t, -\frac{1}{t^2})$
Oppgave 3: -8
Oppgave 5: $-x + 2y + z + 3w = 12$