Kapittel 4

Lineære ligningssystemer

Allerede i ungdomsskolen lærte du å løse enkle, lineære ligningssystemer med to ukjente slik som

$$2x - y = 3$$

$$x + 3y = 4$$

Senere har du truffet slike ligningssystemer i mange sammenhenger, ofte med flere ligninger og flere ukjente. Et typisk eksempel er delbrøkoppspalting der vi bruker ligningssystemer til å finne konstantene i oppspaltingen.

I dette kapitlet skal vi se nærmere på teorien for slike lineære ligningssystemer (dvs. ligningssystemer der de ukjente bare opptrer i første potens og ikke inni mer kompliserte funksjoner). Kanskje kan dette virke litt unødvendig siden vi vet hvordan vi skal løse slike ligningssystemer i praksis, men det viser seg at det er mye å tjene på et mer systematisk studium. Dette gjelder blant annet mer teoretiske spørsmål som når et ligningssystem har løsninger, hvor mange løsninger det kan ha, og hvordan vi kan finne en løsning som er "best mulig" i en eller annen forstand. Det viser seg også at denne teorien hjelper oss med andre spørsmål som vi hittil ikke har hatt gode svar på, f.eks. hvordan vi avgjør om en matrise er inverterbar (og finner den inverse dersom den finnes) og hvordan vi finner egenverdiene og egenvektorene til en matrise.

Enda viktigere enn disse teoretiske problemstillingene er de praktiske grunnene til å studere lineære ligningssystemer — det viser seg at svært mange sentrale problemstillinger i matematikk, fysikk, informatikk, statistikk, økonomi og andre fag kan løses (i hvert fall tilnærmet) ved hjelp av lineære ligningssystemer. Disse ligningssystemene består ofte av mange tusen ligninger og ukjente, og de kan bare løses ved hjelp av datamaskiner. Når man skal programmere en datamaskin til å løse slike problemer, kan man ikke stole på snarveier og smarte triks — man må ha systematiske metoder som alltid fungerer. Vi skal se på en metode som kalles *Gauss-eliminasjon* eller *Gauss-Jordan-eliminasjon*.

4.1 Noen eksempler på Gauss-eliminasjon

La oss introdusere metoden gjennom et enkelt eksempel. Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ved å omforme det til stadig enklere ligningssystemer som har nøyaktig de samme løsningene (som vi skal se senere, kan et lineært ligningssystem ha én, ingen eller uendelig mange løsninger). Til slutt sitter vi igjen med et ligningssystem som er så enkelt at vi kan løse det med hoderegning. Ideen bak metoden er å *eliminere* (fjerne) ukjente fra så mange ligninger som mulig — først eliminerer vi den første variablen x fra alle ligninger unntatt den øverste, deretter eliminerer vi den andre variablen y fra alle ligninger unntatt de to øverste osv. Det ligningssystemet vi sitter igjen med til slutt, kan løses nedenfra — først finner vi verdien til den siste variablen fra den nederste ligningen, deretter bruker vi denne verdien til å verdien til variablen foran osv. Dette kan høres komplisert ut, men når vi bruker metoden på ligningssystemet ovenfor, vil du fort se hvordan den virker.

Siden vi skal eliminere x fra alle ligningene unntatt den øverste, passer det dårlig at den øverste ligningen mangler x-ledd. Vi begynner derfor med å bytte om den første og siste ligningen:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Det nye ligningssystemet har selvfølgelig akkurat de samme løsningene som det gamle; rekkefølgen av ligningene spiller ingen rolle. Neste skritt i metoden er å bruke x-leddet i den øverste ligningen til å eliminere x-leddet i de andre. Ganger vi den første ligningen med -3, får vi $-3x - 6y - 3z = -3$, og legger vi denne ligningen til ligning nummer to i (4.1.2), får vi dette ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ 2y + z &= -1 \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Dette ligningssystemet må ha nøyaktig de samme løsningene som det foregående (vær sikker på at du skjønner hvorfor!). Normalt ville vi nå fortsette med å eliminere x-en i den nederste linjen, men siden den allerede er borte, kan vi konsentrere oss om y-ene isteden. Vi skal bruke y-leddet i den nest øverste ligningen til å eliminere y-leddet i den nederste ligningen. Multipliserer vi den nest øverste ligningen med 2, får vi $-2y - 4z = -2$, og legger vi dette til den nederste ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -y - 2z &= -1 \\ -3z &= -3 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

Igjen ser vi at dette ligningssystemet har akkurat de samme løsningene som det foregående. Nå er vi nesten ferdige, men vi kan forenkle ligningene ytterligere ved å gange den midterste med -1 og den nederste med $-\frac{1}{3}$:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

Dette ligningssystemet er enkelt å løse; fra den nederste ligningen ser vi at $z = 1$, setter vi dette inn i den midterste, får vi at $y = -1$, og setter vi disse verdiene for y og z inn i den øverste ligningen, ser vi at $x = 2$. Siden alle ligningssystemene våre har de samme løsningene, betyr dette at $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$ også er (den eneste) løsningen til det opprinnelige ligningssystemet (4.1.1).

Bemerkning: Det finnes raskere måter å løse ligningssystemet (4.1.1) på. Sammenligner vi den første og den siste ligningen, ser vi med en gang at $x = 2$, og deretter er det ikke vanskelig å finne y og z. Slike snarveier er viktige når vi løser ligningssystemer for hånd, men det er ikke det som er poenget for oss nå — vi er på jakt etter systematiske metoder som fungerer for *alle* ligningssystemer.

Av åpenbare grunner sier vi at ligningssystemet (4.1.5) er på *trappeform*, og målet for metoden vi er iferd med å beskrive, er å føre et hvilket som helst lineært ligningssystem over på trappeform. Legg merke til at vi i prosessen ovenfor har brukt tre operasjonstyper:

(i) Bytte om to ligninger i ligningssystemet

(ii) Gange en ligning i systemet med et tall forskjellig fra 0

(iii) Ta én av ligningene i systemet og legg til et multiplum av en av de *andre* ligningene

Det viser seg at alle lineære ligningssystemer kan føres over på trappeform ved å bruke disse tre operasjonene.

Når vi bruker operasjonene ovenfor, endrer vi ikke løsningene til ligningssystemet — vi mister ikke løsninger og pådrar oss heller ikke nye, "falske" løsninger. Det betyr at løsningene til det enkle trappeformede systemet vi ender opp med, er de samme som løsningene til det mer kompliserte systemet vi startet med. Det er lettere å forstå hvorfor dette er viktig dersom vi ser på et ligningssystem med uendelig mange løsninger.

Vi skal se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ -x-y-4z+2u &= -1 \\ 2x+5y-z &= 9 \\ x+7z-5u &= -3 \end{aligned}$$

Vi bruker først x-leddet i den øverste ligningen til å kvitte oss med x-leddene i de andre ligningene. Legger vi den øverste linjen til den andre, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ 2x+5y-z &= 9 \\ x+7z-5u &= -3 \end{aligned}$$

For å bli kvitt x-leddet i ligning nummer tre, ganger vi først den øverste ligningen med -2 og får $-2x-4y-2z+2u=-6$. Legger vi dette til den tredje ligningen, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ y-3z+2u &= 3 \\ x+7z-5u &= -3 \end{aligned}$$

For å kvitte oss med x-leddet i den nederste linjen, ganger vi den øverste linjen med -1 og får $-x-2y-z+u=-3$. Legger vi dette til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x+2y+z-u &= 3 \\ y-3z+u &= 2 \\ y-3z+2u &= 3 \\ -2y+6z-4u &= -6 \end{aligned}$$

Nå har vi kvittet oss med alle de x-leddene vi ønsket å fjene. Neste trinn på programmet er å bruke y-leddet i ligning nummer to til å eliminere y-leddet i alle ligningene nedenfor. Ganger vi linje nummer to med -1, får vi

$-y + 3z - u = -2$, og legger vi dette til linje nummer tre, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ y - 3z + u &= 2 \\ u &= 1 \\ -2y + 6z - 4u &= -6 \end{aligned}$$

For å bli kvitt y-leddet i den nederste ligningen, ganger vi først ligning nummer to med 2 og får $2y - 6z + 2u = 4$. Legger vi dette til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ y - 3z + u &= 2 \\ u &= 1 \\ -2u &= -2 \end{aligned}$$

Ifølge systemet vårt skulle vi nå ha brukt z-leddet i den tredje ligningen til å kvitte oss med z-leddet i den fjerde, men det er ikke noe z-ledd i tredje ligning, og vi kan heller ikke skaffe oss noe ved å bytte om på ligning 3 og 4. Vi går derfor videre til den neste variabelen u, og bruker u-leddet i den tredje ligningen til å eliminere u-leddet i fjerde. Ganger vi ligning 3 med 2, får vi $2u = 2$, og legger vi dette til ligning 4, får vi

$$\begin{aligned} x + 2y + z - u &= 3 \\ y - 3z + u &= 2 \\ u &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Vi har nå fått ligningssystemet over på trappeform, men trappen er litt mer uregelmessig enn i stad siden ikke alle trappetrinnene er like lange. Dette er helt greit og ikke til å unngå i mange tilfeller.

La oss nå prøve å løse ligningssystemet ovenfor. Den siste ligningen er alltid oppfylt og kan bare glemmes. Den nest nederste ligningen forteller oss at $u = 1$. Ligningen over gir oss ikke noe krav på z, men forteller oss at vi kan regne ut y når vi kjenner z. Dette betyr at vi kan velge z helt fritt, men når valget er gjort, må vi la $y = 2 + 3z - u = 1 + 3z$ (husk at $u = 1$). Den øverste ligningen lar oss på tilsvarende måte regne ut x når z er valgt — vi får $x = 3 - 2y - z + u = 3 - 2(1 + 3z) - z + 1 = 2 - 7z$. Dette betyr at ligningen har uendelig mange løsninger, nemlig

$$\begin{aligned} x &= 2 - 7z \\ y &= 1 + 3z \\ z &= z \\ u &= 1 \end{aligned}$$

der z er et fritt valgt tall. Det er instruktivt å sette disse uttrykkene inn i det opprinnelige ligningssystemet og se at de passer.

Når man arbeider med ligningssystemer med uendelig mange løsninger, er det lett å forstå fordelene ved bare å bruke operasjoner som ikke endrer løsningsmengden til ligningssystemet — i systemet ovenfor hadde det ikke vært enkelt å holde styr på hvilke falske løsninger vi hadde pådratt oss og hvilke ekte vi hadde mistet.

Vi tar med enda et eksempel som viser hva som skjer når ligningssystemet *ikke* har løsninger. Vi starter med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1\\ 2x-2y-z+u &= 0\\ -x+2y+u &= 2\\ 2x-y+u &= 2 \end{aligned}$$

og bruker på vanlig måte x-leddet i den første ligningen til å eliminere de andre. Ganger vi den øverste ligningen med -2 og legger resultatet til den nest øverste får vi

$$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1\\ -3z+3u &= -2\\ -x+2y+u &= 2\\ 2x-y+u &= 2 \end{aligned}$$

Legger vi den øverste linjen til den tredje, får vi

$$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1\\ -3z+3u &= -2\\ y+z \quad &= 3\\ 2x-y \quad +u &= 2 \end{aligned}$$

Til slutt ganger vi den øverste linjen med -2 og legger resultatet til den nederste:

$$\begin{aligned} x-y+z-u &= 1\\ -3z+3u &= -2\\ y+z \quad &= 3\\ y-2z+3u &= 0 \end{aligned}$$

Neste post på programmet er vanligvis å bruke y-leddet i den andre ligningen til å kvitte seg med y-leddene nedenfor, men i dette tilfellet er det ikke noe

y-ledd i den andre ligningen. Vi bytter derfor om på ligning 2 og 3:

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z \quad\quad &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ y - 2z + 3u &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den andre linjen med -1 og legger resultatet til den nederste linjen, får vi

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z \quad\quad &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ -3z + 3u &= -3 \end{aligned}$$

Det gjenstår å bruke z-leddet i tredje linje til å eliminere z-leddet i den nederste linjen. Ganger vi den tredje linjen med -1 og legger resultatet til den nederste, får vi

$$\begin{aligned} x - y + z - u &= 1 \\ y + z \quad\quad &= 3 \\ -3z + 3u &= -2 \\ 0 &= -1 \end{aligned}$$

Dermed har vi fått ligningssystemet på trappeform. Siden den nederste linjen er umulig å oppfylle (ingen valg av x, y, z, u kan få 0 til å bli lik -1), har systemet ingen løsning. Det betyr at det opprinnelige systemet heller ikke har noen løsning.

Det viser seg at vi nå har sett alle de mulighetene som finnes — et lineært ligningssystem kan ha enten én, uendelig mange eller ingen løsninger. Dette kan virke underlig, men det er ikke vanskelig å få et geometrisk innblikk i det som foregår. La oss se på et ligningssystem med tre ligninger og tre ukjente:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

Hver av disse ligningene beskriver et plan — la oss kalle dem I, II og III. En løsning til ligningssystemet vil være (koordinatene til) et punkt som ligger i alle tre planene. "Normalt" vil plan I og II skjære hverandre langs en rett linje m (unntakene er hvis I og II er parallelle eller sammenfallende).

Denne linjen m vil normalt skjære det tredje planet i ett eneste punkt, og koordinatene til dette punktet gir oss da den eneste løsningen til ligningssystemet. Det finnes imidlertid unntak; dersom skjæringslinjen m ligger i planet III, vil alle punktene på denne linjen gi oss en løsning — i dette tilfellet har vi altså uendelig mange løsninger. En tredje mulighet er at linjen m ikke skjærer planet III i det hele tatt — i så fall har ligningssystemet ingen løsning.

I den neste seksjonen skal vi se grundigere på metoden ovenfor, men før vi begynner, kan det være lurt å gjøre en enkel observasjon. I alle regningene våre har variablene x, y, z, u spilt en underordnet rolle — de har bare vært med som en slags "plassholdere" som har fortalt oss hvilke koeffisienter som hører sammen. Vi kan spare skrivearbeid og tjene oversikt ved å fjerne variablene og isteden organisere koeffisientene i en matrise. Vårt første ligningssystem

$$\begin{aligned} 2y + z &= -1 \\ 3x + 5y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 1 \end{aligned}$$

kan f.eks. ertattes med matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Legg merke til hvordan B er laget: Elementene i den første søylen er koeffisienten til x i ligningssystemet, elementene i den andre søylen er koeffisientene til y, elementene i den tredje søylen er koeffisientene til z, mens den fjerde søylen består av konstantene på høyresiden av ligningssystemet. Vi kaller B *den utvidede matrisen* til ligningssystemet (4.1.1) (*utvidet* fordi vi ikke bare har med koeffisientene, men også konstantene på høyresiden). Vi kan nå utføre akkurat de samme operasjonene på denne matrisen som vi i stad utførte på ligningssystemet. Vi får da denne sekvensen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Når vi nå har fått matrisen på trappeform, kan vi gå tilbake til ligningssystemet:

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Siden matrisenotasjonen er mer oversiktlig enn ligningsnotasjonen, skal vi stort sett holde oss til den i fortsettelsen.

4.2 Trappeform

Vi skal nå ta en nærmere kikk på prosedyren vi introduserte i forrige seksjon. For oversiktens skyld skal vi stort sett arbeide med matriser og ikke ligningssystemer, så vi antar at vi starter med en matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Med en *radoperasjon* på A mener vi én av følgende operasjoner:

(i) Bytte om to rader i A

(ii) Gange en av radene i A med et tall forskjellig fra 0

(iii) Ta en av radene i A og legge til et multiplum av en av de *andre* radene

Legg merke til at dette er nøyaktig de samme operasjonene som vi brukte på ligningssystemene i forrige seksjon.

Definisjon 4.2.1 *Vi sier at to $m \times n$-matriser A, B er* radekvivalente *dersom det finnes en sekvens av radoperasjoner som forvandler A til B. Vi skriver $A \sim B$ når A og B er radekvivalente.*

Eksempel 1: Matrisene

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

og

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

er radekvivalente siden A kan forvandles til B gjennom denne sekvensen av radoperasjoner (radene i matrisen kalles I, II og III, og symbolene over $\sim$-tegnene antyder hvilke operasjoner vi bruker):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+I}{\sim}$$

$$\overset{III+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{II\leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

♣

Det er lett å se at dersom vi kan forvandle A til B ved hjelp av radoperasjoner, så kan vi også bruke radoperasjoner til å forvandle B til A. Alt vi behøver å gjøre, er å "reversere" de operasjonene som forvandlet A til B — der vi tidligere ganget en rad med 3, ganger vi den nå med $\frac{1}{3}$; der vi tidligere la til 7 ganger en rad, legger vi nå til -7 ganger den samme raden, og der vi tidligere byttet om to rader, bytter vi dem nå tilbake igjen. I tillegg må vi passe på å begynne bakfra; vi begynner med å reversere den *siste* operasjonen som var med på å forvandle A til B. Det neste eksemplet viser hvordan dette foregår i praksis.

Eksempel 2: I forrige eksempel forvandlet vi matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{til} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

og vi skal nå vise hvordan vi kan reversere denne prosedyren slik at B blir forvandlet til A. Siden den siste operasjonen vi brukte da vi forvandlet A til B, var å gange rad 2 med $\frac{1}{5}$, gjør vi nå det omvendte — vi ganger rad 2 med 5:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{5II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Den nest siste operasjonen vi brukte, var å bytte om rad 2 og 3, så nå bytter vi tilbake igjen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II\leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Operasjonen før dette var å legge rad 1 til rad 3, så nå trekker vi isteden rad 1 fra rad 3 (for å holde oss i vår offisielle språkbruk, burde vi heller si at vi ganger rad I med -1 og legger resultatet til rad 3):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Den neste operasjonen vi må reversere, er å legge -1 ganger rad 1 til rad 2. Vi legger derfor rad 1 til rad 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Det gjenstår nå bare å reverse en operasjon. Den var å gange rad 1 med $\frac{1}{2}$, så nå ganger vi rad 1 med 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Dermed har vi reversert hele prosedyren og gjort B om til A. ♣

Som antydet i forrige seksjon, er hensikten med radoperasjoner å forvandle en vilkårlig matrise til en matrise på trappeform. Aller først må vi definere hva dette betyr:

Definisjon 4.2.2 *En matrise er på* trappeform *dersom:*

(i) Enhver rad består enten bare av nuller, eller så er det første ikke-null elementet et ett-tall.

(ii) Enhver rad som ikke bare består av nuller, begynner med minst én null mer enn raden over.

En matrise på trappeform blir også kalt en trappematrise.

Legg merke til at dersom en trappematrise har rader som bare består av nuller, må disse være samlet nederst i matrisen (det følger fra punkt (ii) ovenfor).

Eksempel 3: Følgende matriser er på trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Disse matrisene er ikke på trappeform (forklar hvorfor):

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\clubsuit$

For å kunne beskrive matriser på trappeform trenger vi litt terminologi. Det første ikke-null elementet i en rad (det er nødvendigvis et ett-tall) kalles et *pivotelement*, og søylen det står i, kalles en *pivotsøyle* (se illustrasjonen nedenfor). Pivotelementer og pivotsøyler kommer til å spille en sentral rolle i teorien i dette kapitlet.

pivotelementer

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pivotsøyler

Vi har allerede nevnt flere ganger at poenget med radoperasjoner er å forvandle en gitt matrise til en matrise på trappeform. Det neste resultatet forteller oss at dette alltid er mulig.

Setning 4.2.3 *Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på trappeform.*

Bevis: Dette beviset er bare en systematisering av den metoden vi har brukt i eksemplene. Først ser vi på søylene i matrisen og plukker ut den første som ikke bare består av nuller. Ved eventuelt å bytte om to rader kan vi sørge for at det øverste elementet i denne søylen ikke er null, og ved å gange den øverste raden med et passe tall, kan vi gjøre om dette elementet til et ett-tall. Ved hjelp av dette ett-tallet kan vi nå eliminere alle ikke-null elementer i søylen under — vi bare ganger den øverste linjen med et passe tall og adderer resultatet til den raden vi arbeider med. Når dette arbeidet er ferdig, står ett-tallet alene igjen i søylen og er blitt vårt første pivotelement. Vi "glemmer" nå den øverste raden i matrisen og arbeider bare med resten (så når vi nå sier "matrisen" mener vi det som står igjen etter at vi har fjernet første rad).

Vi begynner nå prosedyren på nytt med å lete oss frem til den første søylen (i "restmatrisen") som ikke bare består av nuller. Ved eventuelt å bytte om rader sikrer vi oss at det øverste elmentet ikke er 0, og ved å gange raden med et passende tall, forvandler vi elementet til et ett-tall. På vanlig måte bruker vi dette ett-tallet til å eliminere elementene i søylen nedenfor. Nå har vi funnet vårt andre pivotelement, så vi "glemmer" raden det står i, og gjentar prosedyren på radene nedenfor.

Denne prosedyren fortsetter inntil én av to ting skjer. Enten er det ikke flere rader igjen (og da er vi ferdige fordi det står et pivotelement i hver eneste rad), eller så består alle søylene i den "restmatrisen" vi ser på, av bare nuller (og da er vi ferdige fordi vi har pivotelementer i alle de radene som ikke bare består av nuller). □

Bemerkning: Når vi bruker radoperasjoner til å bringe en matrise A over på trappeform, sier vi at vi *radreduserer* A. Det er greit å være klar over at matriser kan radreduseres på forskjellige vis — når du bruker metoden, har du ofte et valg mellom flere muligheter (f.eks. hvilke rader du vil bytte om på), og det endelige resultatet vil ofte avhenge av hvilke valg du gjør underveis. Det kan derfor godt hende at fasitsvaret på en oppgave er forskjellig fra ditt svar, selv om ditt også er riktig. Det viser seg imidlertid at alle trappeformene til en matrise har de samme pivotsøylene (og dermed de samme pivotelementene), og dette kan du bruke som en sjekk på at svaret ditt er rimelig.

Ligningssystemer på trappeform

Vi skal nå vende tilbake til lineære ligningssystemer og se dem i lys av det vi nettopp har lært. Vi starter med et generelt, lineært ligningssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Legg merke til at vi ikke insisterer på at det skal være like mange ligninger som ukjente — det finnes en del problemstillinger der det er aktuelt både å se på "for få" og "for mange" ligninger.

Vi tar nå den utvidede matrisen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

og bringer den på trappeform ved hjelp av radoperasjoner. Den matrisen C vi da får, tilhører et ligningssystem med de samme løsningene som det opprinnelige systemet. I dette systemet vil noen variable ("ukjente") korrespondere til pivotsøyler, og disse kaller vi *basisvariable*, mens de andre kalles *frie variable*. La oss se på et eksempel:

Eksempel 4: Vi starter med ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 0 \\ x + 5y + z &= 2 \end{aligned}$$

Den utvidede matrisen er

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi B, får vi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

I denne trappematrisen C er søyle 1 og 2 pivotsøyler. Søyle 1 og 2 tilsvarer variablene x og y, så disse er basisvariable, mens z (som tilsvarer søyle 3) er en fri variabel. Vi ser at C er den utvidede matrisen til systemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Den nederste ligningen er alltid oppfylt og kan neglisjeres. De to andre ligningene legger ingen føringer på den *frie variabelen* z som kan velges fritt, og når den er valgt, kan vi regne ut verdiene til basisvariablene x og y. Vi får $y = \frac{1}{3}$ og $x = 1 - 2y - z = \frac{1}{3} - z$ (at y er uavhengig av z er en tilfeldighet).

La oss nå forandre eksemplet litt. Dersom vi endrer konstantleddet i den tredje ligningen i det opprinnelige problemet fra 2 til 1, får vi ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ -x + y - z &= 0 \\ x + 5y + z &= 1 \end{aligned}$$

med utvidet matrise

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi denne matrisen, ender vi opp med trappematrisen

$$C' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nå har vi fått et pivotelement i siste søyle, og det har dramatiske konsekvenser. Det korresponderende ligningssystemet er nemlig

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ y &= \frac{1}{3} \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

og her ser vi at den siste ligningen aldri kan oppfylles. Ligningssystemet har derfor ingen løsninger. ♣

Mønsteret du ser i eksemplet ovenfor er helt generelt:

Setning 4.2.4 *Anta at den utvidede matrisen til et lineært ligningssystem kan radreduseres til trappematrisen C. Da gjelder:*

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har ligningssystemet ingen løsninger.

Dersom den siste søylen ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har ligningssystemet nøyaktig én løsning.

(iii) Dersom minst én av de andre søylene ikke *er en pivotsøyle, har ligningssystemet uendelig mange løsninger.*

Bevis: Siden det opprinnelige ligningssystemet og det som hører til C, har nøyaktig de samme løsningene, kan vi konsentrere oss om ligningssystemet til C. Anta først at den siste søylen i C er en pivotsøyle. Da inneholder ligningssystemet en ligning av formen $0 = 1$, og har derfor ingen løsninger.

Anta så at den siste søylen i C ikke er en pivotsøyle. Dersom det finnes andre søyler som ikke er pivotsøyler, har systemet frie variable. Gi disse hvilke som helst verdier du ønsker. Du kan nå regne ut verdien til de andre variablene ved å begynne nedenfra med den nederste (ikke-trivielle) ligningen. Denne ligningen gir deg verdien til den siste av basisvariablene. Gå nå videre til ligningen over og regn ut den tilhørende basisvariablen. Fortsett oppover i ligningssystemet til du har regnet ut alle basisvariablene. Dette viser at for hvert valg av frie variable, har ligningssystemet nøyaktig én løsning. Finnes det frie variable, har derfor ligningssettet uendelig mange løsninger. Finnes det ikke frie variable (dvs. at alle søyler unntatt den siste er pivotsøyler), må ligningssettet ha nøyaktig én løsning. □

Det er ofte viktig å vite når et ligningssystem har nøyaktig én løsning (vi kaller dette en *entydig* løsning), og vi tar derfor med dette som et separat resultat:

Korollar 4.2.5 *Anta at den utvidede matrisen til et lineært ligningssystem kan radreduseres til trappematrisen C. Da har ligningssystemet en entydig løsning hvis og bare hvis alle søyler i C unntatt den siste, er pivotsøyler.*

Bevis: Dette er bare en omskrivning av punkt (ii) i setningen ovenfor. □

Matrisen nedenfor viser en typisk trappematrise som tilsvarer et ligningssystem med entydig løsning:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & \pi \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at pivotelementene begynner øverst i venstre hjørne og fortsetter nedover diagonalen inntil de når den nest siste søylen. Under dette nivået kan det godt være noen rader med bare nuller.

Ligningssystemer med samme venstreside

Både i teori og praksis hender det ofte at vi har behov for å løse "det samme" ligningssystemet gang på gang med forskjellig høyreside. Mer presist betyr dette at vi ønsker å løse systemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mange ganger for de samme koeffisientene a_{ij}, men for forskjellige b_i. Et spørsmål som da dukker opp, er når det er mulig å løse ligningssystemet for *alle* valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$. For å løse dette problemet ser vi på *matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

til ligningssystemet (ikke bland denne sammen med den *utvidede matrisen*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

der b-ene er med!) Vi radreduserer så A til en trappematrise D. Det viser seg at ligningssystemet vårt har en løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom alle *radene* i D inneholder et pivotelement.

Setning 4.2.6 *Anta at*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen D. Da har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

en løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ hvis og bare hvis alle radene i D inneholder pivotelementer.

Bevis: Anta først at D har pivotelementer i alle rader, og velg $b_1, b_2, \ldots, b_m$. La B være den utvidede matrisen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Vi vet at A lar seg forvandle til D gjennom en sekvens av radoperasjoner, og vi lar nå C være den matrisen vi får når vi lar B gjennomgå den samme sekvensen av operasjoner. Da er

$$C = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & \tilde{b}_1 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

der d_{ij} er elementene i D og $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ er resultatet av å bruke disse radoperasjonene på $b_1, b_2, \dots, b_m$. Siden D har et pivotelement i hver rad, kan ikke den siste søylen i C være en pivotsøyle, og følgelig har ligningssystemet minst en løsning.

Anta nå omvendt at D mangler pivotelement i noen av radene, og la rad nummer j være den første av disse. Hvis vi kan finne $b_1, b_2, \dots, b_m$ slik at $\tilde{b}_j$ er lik 1, vil C få et pivotelement i siste søyle, og ligningssystemet vil da ikke ha en løsning. Siden radoperasjonene er reverserbare, er det ikke vanskelig å finne et slikt sett med b-er. Vi velger oss rett og slett et sett $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \dots, \tilde{b}_m$ med den egenskapen vi ønsker oss ved å la $\tilde{b}_j = 1$, mens $\tilde{b}_i = 0$ for alle andre indekser i. Så danner vi matrisen

$$C = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} & \tilde{b}_1 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \dots & d_{mn} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

Legg merke til at C er på trappeform og at $\tilde{b}_j$ er et pivotelement i siste rad. Nå bruker vi de omvendte av de operasjonene som førte A til B til å føre C tilbake til en matrise på formen

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

(husk reverseringsprosedyren i eksempel 2). Ligningssystemet til B kan ikke ha en løsning siden vi kan bruke de opprinnelige radoperasjonene til å forvandle B til C, og C har et pivotelement i siste rad. $\square$

Legg merke til at dersom $m > n$ (dvs. at matrisen A har flere rader enn søyler), så er det ikke plass til et pivotelement i hver rad (husk at pivotelementene må flytte seg minst ett skritt mot høyre for hver rad), og ligningssystemet kan derfor ikke ha løsninger for alle $b_1, b_2, \dots, b_m$.

La oss også se på betingelsen for at ligningssystemet har en *entydig* løsning for alle valg at $b_1, b_2, \dots, b_m$:

Korollar 4.2.7 *Anta at*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen D. Da har ligningssystemet

$$\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ hvis og bare hvis alle radene og alle søylene i D inneholder pivotelementer. Dette betyr at D er en kvadratisk matrise med pivotelementer på diagonalen.

Bevis: Vi vet fra setningen ovenfor at det må være pivotelementer i alle rader dersom vi skal ha løsninger for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Vi vet også at for å få entydige løsninger, må vi ha pivotelementer i alle søyler. Skal vi få plass til pivotelementer i alle rader og alle søyler, må D være en kvadratisk matrise med pivotelementer på diagonalen (prøv deg frem, så vil du se). $\square$

Bemerkning: Ifølge resultatet ovenfor er det bare mulig å ha entydige løsninger for alle $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom D — og dermed A — er en kvadratisk matrise, dvs. at vi har like mange ligninger som ukjente. Dette er en viktig observasjon som vi skal møte igjen i ulike forkledninger senere i kapitlet.

Det er på tide med et eksempel:

Eksempel 5: Vi skal undersøke om ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} 3x + y - 2z & = & b_1 \\ -x + 2y - z & = & b_2 \\ x + z & = & b_3 \end{array}$$

har en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Matrisen til systemet er

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bruker vi radoperasjoner på denne matrisen, får vi (vi tillater oss å ta flere operasjoner i slengen slik at ikke utledningen skal bli for lang):

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I\leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+I}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{7}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{10}{7} \end{pmatrix} \overset{\substack{(-1)I \\ \frac{7}{10}III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Siden den siste matrisen har et pivotelement i hver rad, har ligningssystemet en løsning for alle valg av b_1, b_2, b_3. Siden det også er et pivotelement i hver søyle, er denne løsningen entydig. ♣

4.3 Redusert trappeform

Når vi omformer en matrise til trappeform, sørger vi for at elementene *under* pivotelementene alltid er null, men vi bryr oss ikke om elementene *over* pivotelementene. For noen formål lønner det seg å sørge for at disse elementene også er null. Vi sier da at matrisen er på *redusert trappeform*. Her er den presise definisjonen:

Definisjon 4.3.1 *Vi sier at en matrise er på* redusert trappeform *dersom den er på trappeform og alle elementene i pivotsøylene, unntatt pivotelementene, er 0.*

Eksempel 1: Disse matrisene er på redusert trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Disse matrisene er på trappeform, men *ikke* på redusert trappeform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

♣

Alle matriser kan omformes til redusert trappeform ved hjelp av radoperasjoner. Vi radreduserer dem først til vanlig trappeform, og bruker deretter pivotelementene til å skaffe oss de resterende nullene i pivotsøylene.

Det er lurest å begynne bakfra med de pivotelementene som står lengst til høyre. Her er et eksempel:

Eksempel 2: Vi starter med en matrise som er på vanlig trappeform

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Deretter tar vi utgangspunkt i pivotelementet nederst til høyre, og bruker det til å skaffe oss nuller i posisjonene over:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+(-2)III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed har vi ordnet opp i den bakerste søylen, og vi går nå mot venstre på jakt etter neste pivotsøyle. Det er søyle nummer 3, og vi bruker nå pivotelementet her til å skaffe flere nuller:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{I+3II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dermed er matrisen brakt på redusert trappeform. ♣

Poenget med å starte prosessen bakfra er at vi slipper unna mye regnearbeid fordi de fleste tallene vi adderer er 0.

Setning 4.3.2 *Enhver matrise er radekvivalent med en matrise på redusert trappeform.*

Bevis: Vi vet allerede at matrisen er radekvivalent med en matrise på vanlig trappeform, så alt vi trenger å vise er at enhver matrise på vanlig trappeform er ekvivalent med en matrise på reduset trappeform. Dette følger fra prosedyren vi har beskrevet ovenfor. Det eneste som kunne gått galt med denne prosedyren, var hvis noen av de operasjonene vi gjorde underveis, ødela nuller vi allerede hadde skaffet oss på et tidligere tidspunkt, men det er lett å sjekke at det ikke skjer. □

Bemerkning: Det viser seg at den reduserte trappeformen til en matrise er entydig bestemt — uansett hvilken sekvens av radoperasjoner du bruker for å bringe en matrise på redusert trappeform, blir sluttresultatet det samme. Vi skal derfor av og til snakke om "den reduserte trappeformen" i bestemt form.

Det neste resultatet skal vi ofte få bruk for. Husk at korollar 4.2.7 forteller oss at ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

bare kan ha en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_m$ dersom $m = n$, dvs. dersom vi har like mange ligninger som ukjente.

Setning 4.3.3 *Ligningssystemet*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

har en entydig løsning for alle valg av $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *hvis og bare hvis den tilhørende matrisen*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

er radekvivalent med identitetsmatrisen

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Bevis: Dersom A er radekvivalent med identitetsmatrisen, følger det umiddelbart fra korollar 4.2.7 at ligningssystemet alltid har en entydig løsning. På den annen side: Dersom ligningssystemet alltid har en entydig løsning, vet vi fra korollar 4.2.7 at A er radekvivalent med en trappematrise der alle pivotelementene ligger på diagonalen. Den reduserte trappeformen til en slik matrise er identitetsmatrisen (hvorfor?), og følgelig er A radekvivalent med en diagonalmatrise. $\square$

Redusert trappeform i MATLAB

Det er ganske kjedelig å føre store matriser over på trappeform for hånd, men heldigvis finnes det hjelpemidler. Dersom du har tastet inn en matrise A i MATLAB, vil kommandoen `>> rref(A)` få MATLAB til å regne ut den reduserte trappeformen til A. Her er et eksempel på en kjøring:

```
>> A=[2 -1 4 5 6
6 -1 3 2 1
-2 3 1 0 5];

>> B=rref(A)

B =

    1.0000         0         0   -0.4286   -0.7500
         0    1.0000         0   -0.7143    0.5000
         0         0    1.0000    1.2857    2.000
```

Kommandonavnet `rref` kan virke litt mystisk, men det skyldes rett og slett at redusert trappeform heter *reduced row echelon form* på engelsk. Vanlig trappeform heter *row echelon form*.

La oss se hvordan vi kan bruke kommandoen `rref` til å løse et ligningssystem.

Eksempel 3: Vi skal løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z + u + v &= 2 \\ 3x + y - z + 2u - v &= 3 \\ -x - 2y + 4z + u + 2v &= 4 \end{aligned}$$

Den utvidede matrisen er

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

og putter vi denne inn i MATLAB og bruker `rref`, får vi

```
>> B=[2 -1 3 1 1 2
3 1 -1 2 -1 3
-1 -2 4 1 2 4];

>> C=rref(B)
```

```
C =

    1.0000         0    0.4000         0         0   -0.5000
         0    1.0000   -2.2000         0   -1.0000   -0.5000
         0         0         0    1.0000         0    2.5000
```

Den reduserte trappeformen er altså

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & -2.2 & 0 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2.5 \end{pmatrix}$$

Vi ser at pivotsøylene er søyle 1, 2 og 4, og at de frie variablene er z (som korresponderer til søyle 3) og v (som korresponderer til søyle 5). Vi kan derfor velge z og v fritt og løse for de andre variablene. Det er lettest å gjøre dette hvis vi først skriver opp ligningssystemet til C:

$$\begin{aligned} x + 0.4z &= -0.5 \\ y - 2.2z - v &= -0.5 \\ u &= 2.5 \end{aligned}$$

Vi ser at løsningene er gitt ved

$$x = -0.5 - 0.4z$$

$$y = -0.5 + 2.2z + v$$

$$z = z$$

$$u = 2.5$$

$$v = v$$

der z og v kan velges fritt. ♣

4.4 Matriseligninger

Dersom vi starter med en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

og en søylevektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

kan vi regne ut en søylevektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

ved å ta produktet

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Vi kan også snu problemstillingen på hodet: Dersom vi starter med A og $\mathbf{b}$, ønsker vi å finne en vektor $\mathbf{x}$ slik at

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{4.4.1}$$

Vi kaller dette en *matriseligning*. Dersom vi skriver ut ligning (4.4.1) på komponentform, får vi

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{4.4.2}$$

Det å løse matriseligningen (4.4.1) er altså det samme som å løse ligningssystemet

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Mye av den kunnskapen vi har skaffet oss om lineære ligningssystemer, kan vi nå overføre til matriseligninger. Først litt notasjon — vi skal skrive

$$B = (A, \mathbf{b})$$

for den *utvidede matrisen*

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

La oss først oversette setning 4.2.4 til matrisespråk.

Setning 4.4.1 *La $B = (A, \mathbf{b})$ være den utvidede matrisen til matriseligningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

og anta at B kan radreduseres til trappematrisen C. Da gjelder:

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, har ligningssystemet ingen løsninger.

Dersom den siste søylen ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, har ligningssystemet nøyaktig én løsning.

(iii) Dersom minst én av de andre søylene ikke *er en pivotsøyle, har ligningssystemet uendelig mange løsninger.*

Bevis: Dette er bare en omformulering av setning 4.2.4. □

Eksempel 1: Finn alle løsninger til matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ når

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi bruker først radoperasjoner på den utvidede matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dersom vi velger å bruke MATLAB, får vi

```
B=[2 -1 3 3 4 1
3 0 2 1 -1 4
-1 2 -4 -5 0 1];

>> C=rref(B)

C =

    1.0000         0    0.6667    0.3333         0    1.2963
         0    1.0000   -1.6667   -2.3333         0    1.1481
         0         0         0         0    1.0000   -0.1111
```

B er altså radekvivalent med matrisen

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.6667 & 0.3333 & 0 & 1.2963 \\ 0 & 1 & -1.6667 & -2.3333 & 0 & 1.1481 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -0.1111 \end{pmatrix}$$

Vi ser at den siste søylen ikke er en pivotsøyle, så ligningen har løsninger. Vi ser også at søyle 3 og 4 ikke er pivotsøyler, så ligningen har uendelig mange løsninger. Variablene x_3 og x_4 er frie, og velger vi verdier for disse, kan vi regne ut de andre variablene:

$$x_1 = 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4$$

$$x_2 = 1.1481 + 1.6667x_3 + 2.3333x_4$$

$$x_5 = -0.1111$$

Skriver vi løsningen på vektorform, har vi dermed

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1.2963 - 0.6667x_3 - 0.3333x_4 \\ 1.1481 + 1.6667x_3 + 2.3333x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ -0.1111 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.2963 \\ 1.1481 \\ 0 \\ 0 \\ -0.1111 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -0.6667 \\ 1.6667 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -0.3333 \\ 2.3333 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Denne skrivemåten gir en god oversikt over løsningene. ♣

MATLAB-kommentar: De mange desimalene gjør at svarene ovenfor ser litt "bustete ut". Du får mer oversiktelige svar dersom du taster inn kommandoen

```
>> format rat
```

før du regner ut den reduserte trappeformen. Denne kommandoen tvinger MATLAB til å oppgi svarene som rasjonale tall, og du får dette resultatet:

```
>> format rat
>> C=rref(B)

C=

  Columns 1 through 4
```

```
      1              0              2/3             1/3
      0              1             -5/3            -7/3
      0              0              0               0

  Columns 5 through 6

      0            35/27
      0            31/27
      1            -1/9
```

Vær imidlertid klar over at så lenge du er i `format rat`, vil *alle* tall bli representert ved rasjonale tilnærminger. Skriver du f.eks. `>> pi`, får du svaret `355/113`! For å komme tilbake til "vanlig" format, skriver du `>> format short`.

La oss nå undersøke når matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for *alle* vektorer $\mathbf{b}$. Svaret ligger i setning 4.2.6 og korollar 4.2.7:

Setning 4.4.2 *Anta at matrisen A er radekvivalent med trappematrisen D. Da har ligningen*

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

løsning for alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ hvis og bare hvis alle radene i D inneholder et pivotelement. Løsningen er entydig dersom også alle søylene i D inneholder et pivotelement — dette betyr at A er en kvadratisk matrise som er radekvivalent med identitetsmatrisen.

Bevis: Som allerede nevnt er dette bare en omskrivning av setning 4.2.6 og korollar 4.2.7 til matrisespråk. $\Box$

Simultane løsninger av matriseligninger

Anta at vi ønsker å løse matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ for flere verdier av $\mathbf{b}$, la oss si for $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$, $\ldots$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}_k$. Vi ønsker med andre ord å løse ligningene

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_k$$

Som nevnt tidligere er dette en problemstilling som ofte dukker opp i praksis. Den er mest aktuell når ligningssystemene har entydig løsning, så vi antar at A er en kvadratisk matrise som er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n. For å løse ligningene, er det naturlige å begynne med å radredusere den utvidede matrisen $(A, \mathbf{b}_1)$ til den første matriseligningen. Hvis vi gjør dette helt til vi kommer til redusert trappeform, sitter vi igjen med en matrise på formen

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{11} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_{21} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_{n1} \end{pmatrix}$$

der $\tilde{b}_{11}, \tilde{b}_{21}, \dots, \tilde{b}_{n1}$ er de tallene vi får når vi bruker radoperasjonene på komponentene til $\mathbf{b}_1$. Setter vi inn variablene, får vi ligningene

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \tilde{b}_{11} \\ x_2 & = & \tilde{b}_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \tilde{b}_{n1} \end{array}$$

Den siste søylen i C_1 gir oss altså løsningen av den første matriseligningen. Hvis vi gjør det samme med den andre matriseligningen, får vi på tilsvarende måte en matrise

$$C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{12} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_{22} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_{n2} \end{pmatrix}$$

der $\tilde{b}_{21}, \tilde{b}_{22}, \dots, \tilde{b}_{n2}$ er løsningen av den andre matriseligningen. Vi ser at vi har gjort nesten nøyaktig de samme operasjonene to ganger; i begge tilfeller har vi radredusert A til idententitsmatrisen I_n, den eneste forskjellen er at vi har hatt forskjellige sistesøyler å arbeide med. Vi kan effektivisere arbeidet ved å putte inn *alle* høyresidene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ på en gang. Vi starter altså med matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix}$$

der

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{b}_k = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

Omformer vi denne matrisen til redusert trappeform, sitter vi igjen med

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1k} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{b}_{n1} & \tilde{b}_{nk} & \dots & \tilde{b}_{nk} \end{pmatrix}$$

Løsningene av ligningssystemene er altså søylevektorene som står etter identitetsmatrisen.

La oss se på et enkelt eksempel:

Eksempel 2: Vi skal løse ligningene

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, A\mathbf{x} = \mathbf{b}_3$$

der

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi starter med den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

og omdanner denne til redusert trappeform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\frac{1}{2}I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{II+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \end{pmatrix} \overset{-\frac{2}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+(-\frac{1}{2})II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Dette betyr at løsningene til de tre matriseligningene er henholdsvis

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix}, \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Sjekk svarene ved å sette inn i ligningene! ♣

For store ligningssystemer (som er det man ofte støter på i praksis) lønner det seg å bruke MATLAB til å foreta radreduksjonen

4.5 Inverse matriser

Vi skal nå bruke teorien vi nettopp har utviklet til å finne en effektiv metode til å regne ut inverse matriser. Husk at hvis A er en $n \times n$-matrise, så er A^{-1} den inverse matrisen til A dersom

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{og} \quad A^{-1}A = I_n \tag{4.5.1}$$

I seksjon 1.6 viste vi at en kvadratisk matrise kan ha høyst én invers matrise, og at det finnes mange matriser som ikke har invers.

Det første vi skal vise er at en ensidig invers også er en tosidig invers — det vil si at hvis en matrise tilfredsstiller én av betingelsene i (4.5.1), så tilfredsstiller den automatisk den andre. Vi begynner med to hjelpesetninger.

Lemma 4.5.1 *Anta at B og C er to $m \times n$-matriser slik at $B\mathbf{x} = C\mathbf{x}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Da er $B = C$.*

Bevis: Det er nok å vise at dersom $B \neq C$, så finnes det en vektor $\mathbf{x}$ slik at $B\mathbf{x} \neq C\mathbf{x}$. Det er ikke så vanskelig: Siden $B \neq C$, finnes det minst et par av indekser i, j slik at $b_{ij} \neq c_{ij}$. Velger vi $\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, ser vi at $B\mathbf{x} \neq C\mathbf{x}$ siden de i-te komponentene til de to vektorene er henholdsvis b_{ij} og c_{ij}. $\square$

I den neste hjelpesetningen får vi bruk for våre resultater fra forrige seksjon.

Lemma 4.5.2 *La A være en $n \times n$-matrise og anta at det finnes en $n \times n$-matrise B slik at $AB = I_n$ (B er altså en høyreinvers til A). Da har matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ en entydig løsning for alle $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Søylene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ til B er løsningene til ligningene $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \ldots, A\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$.*

Bevis: La $\mathbf{b}_j$ være den j-te søylen i B. Da er $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ (dette skyldes at når du regner ut $A\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j$ gjør du akkurat det samme som når du regner ut den j-te søylen i AB, og den j-te søylen i AB er $\mathbf{e}_j$ siden $AB = I_n$) . Dette betyr at $\mathbf{b}_j$ er en løsning av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$.

For å vise at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for *alle* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, observerer vi først at enhver $\mathbf{c}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Vi har:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n$$

Hvis vi nå lar $\mathbf{x} = c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n$ (der $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ er som ovenfor), får vi

$$A\mathbf{x} = A(c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + \cdots + c_n\mathbf{b}_n) = c_1A\mathbf{b}_1 + c_2A\mathbf{b}_2 + \cdots + c_nA\mathbf{b}_n =$$

$$c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + \cdots + c_n\mathbf{e}_n = \mathbf{c}$$

Dette viser at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for alle $\mathbf{c}$, og det gjenstår å vise at denne løsningen er entydig.

Her kobler vi inn teorien fra forrige seksjon. Vi tenker oss først at vi bruker radoperasjoner til å redusere A til en trappematrise D. Siden ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en løsning for alle $\mathbf{c}$, forteller setning 4.4.2 oss at D har et pivotelemet i hver rad. Siden D er kvadratisk, må D da også ha et pivotelement i hver søyle (ellers er det ikke plass til et pivotelement i hver rad), og ifølge setning 4.4.2 er da løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ entydig. □

Vi kan nå vise at en ensidig invers er en tosidig invers.

Setning 4.5.3 *La A være en $n \times n$-matrise.*

(i) Dersom det finnes en $n \times n$ matrise B slik at $AB = I_n$, så er A inverterbar og $A^{-1} = B$.

(ii) Dersom det finnes en $n \times n$ matrise C slik at $CA = I_n$, så er A inverterbar og $A^{-1} = C$.

Bevis: (i) Vi må vise at $BA = I_n$. Ifølge lemma 4.5.1 er det nok å vise at

$$(BA)\mathbf{x} = I_n\mathbf{x} = \mathbf{x}$$

for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Lar vi $\mathbf{y} = (BA)\mathbf{x}$, er det altså nok å vise at $\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Bruker vi den assosiative lov for matrisemultiplikasjon (setning 1.5.2(i)) flere ganger, ser vi at

$$A\mathbf{y} = A((BA)\mathbf{x}) = A(B(A\mathbf{x})) = (AB)(A\mathbf{x}) = I_n(A\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

Setter vi $\mathbf{b} = A\mathbf{x}$, har vi dermed både

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \text{og} \qquad A\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Siden ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning, betyr dette at $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, og dermed er (i) bevist.

(ii) Vi behøver ikke å vise dette punktet fra bunnen av, men kan bruke (i) (med C i rollen til A, og A i rollen til B). Vi ser nemlig at ifølge (i) er C inverterbar og $C^{-1} = A$. Det betyr at

$$CA = I_n \qquad \text{og} \qquad AC = I_n$$

Men dette er akkurat de betingelsene vi trenger for vite at A er inverterbar og $C = A^{-1}$. $\square$

Det neste resultatet gir oss en nyttig beskrivelse av nøyaktig når en matrise er inverterbar:

Setning 4.5.4 *En $n \times n$-matrise A er inverterbar hvis og bare hvis matrise-ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en entydig løsning for alle vektorer $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, det vil si hvis og bare hvis A er radekvivalent med identitetsmatrisen I_n.*

Bevis: Vi vet fra setning 4.4.2 at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{c}$ hvis og bare hvis A er radekvivalent med identitetsmatrisen. Det er derfor nok å vise at A er inverterbar hvis og bare hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har entydig løsning for alle $\mathbf{c}$.

Anta først at A er inverterbar. Det er naturlig å tro at $x = A^{-1}\mathbf{c}$ er den eneste løsningen til ligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c} \tag{4.5.2}$$

For å sjekke at dette virkelig er en løsning, setter vi inn i ligningen:

$$A\mathbf{x} = A(A^{-1}\mathbf{c}) = (AA^{-1})\mathbf{c} = I_n\mathbf{c} = \mathbf{c}$$

Altså er $x = A^{-1}\mathbf{c}$ en løsning av ligningen. For å vise at denne løsningen er entydig, antar vi nå at $\mathbf{x}$ er en (hvilken som helst) løsning av ligning (4.5.2), dvs. at vi har $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$. Ganger vi fra venstre med A^{-1} på begge sider av likhetstegnet, får vi $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}$. Dermed har vi vist at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har den entydige løsningen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{c}$.

Anta så at $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{c}$. La $\mathbf{b}_j$ være løsningen av ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_j$, og la B være matrisen som har $\mathbf{b}_j$ som j-te søyle. Da er $AB = I_n$, og følgelig er A inverterbar ifølge setning 4.5.3. $\square$

Eksempel 1: Vi skal undersøke om matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

er inverterbar. Radreduserer vi A, får vi:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{II+I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Denne trappematrisen har ikke pivotelementer i siste rad og siste søyle, og ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har derfor ikke entydig løsning for alle $\mathbf{b}$. Dermed vet vi at A ikke er inverterbar. ♣

En metode for å finne inverse matriser

Vi vet nå at en matrise er inverterbar hvis og bare hvis den er radekvivalent med identitetsmatrisen. Vi vet også at for å finne den inverse matrisen til A, er det nok å finne en matrise B slik at

$$AB = I_n$$

I tillegg vet vi at vi kan finne søylene $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots \mathbf{b}_n$ i B ved å løse ligningene

$$A\mathbf{b}_1 = \mathbf{e}_1, A\mathbf{b}_2 = \mathbf{e}_2, \dots, A\mathbf{b}_n = \mathbf{e}_n$$

Fra forrige seksjon vet vi hvordan vi løser slike ligningssett — vi starter med matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

der vi har utvidet A med høyresidene i ligningene $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$, og omformer den til redusert trappeform:

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Løsningene av matriseligningene er da søylene til høyre for identitetsmatrisen:

$$\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \vdots \\ b_{nn} \end{pmatrix}$$

og den inverse matrisen blir

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Vi kan oppsummere metoden slik: Dersom vi omformer matrisen (A, I_n) til redusert trappeform, får vi matrisen (I_n, A^{-1}). La oss demonstrere metoden på et eksempel:

Eksempel 2: Vi skal bruke metoden til å invertere matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det første vi gjør er "å skjøte på" A en identitetsmatrise slik at vi får matrisen

$$(A, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vi skriver nå denne matrisen på redusert trappeform:

$$(A, I_3) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+2I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II\leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{(-1)II \\ \frac{1}{3}III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{I+(-1)III \\ II+2III}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{I+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = (I_3, B)$$

Den første halvparten av denne matrisen er identitetsmatrisen, og den andre halvparten er $B = A^{-1}$. Vi har altså

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Du bør sjekke at dette er riktig ved å utføre multiplikasjonen

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ -\frac{10}{3} & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

♣

Metoden fungerer også i det tilfellet der A ikke er inverterbar. Da vil den reduserte trapeformen til (A, I_n) ikke begynne med identitetsmatrisen I_n, og dette forteller oss at A ikke er inverterbar.

Inverse matriser i MATLAB

Dersom du har lastet inn en inverterbar matrise A i MATLAB, vil kommandoen

```
>> B=inv(A)
```

få MATLAB til å regne ut den inverse matrisen og legge den inn i variabelen B. Dersom du ønsker å løse matriseligningen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

kan du nå gjøre det ved å skrive

```
>> x=Bb
```

(dette forutsetter selvfølgelig at du allerede har lastet inn $\mathbf{b}$). Det er imidlertid mer effektivt å bruke kommandoen

```
>> x=A\b
```

Legg merke til at "brøkstreken" **** går "gal vei" — det skyldes at man her "deler fra venstre" (det vil si at man gjør noe som tilsvarer å gange med A^{-1} fra venstre). Kommandoen

```
>> x=b/A
```

med "normal" brøkstrek, produserer løsningen til ligningen $\mathbf{x}A = \mathbf{b}$ (i dette tilfellet må $\mathbf{x}$ og $\mathbf{b}$ være radvektorer for at dimensjonene skal passe) fordi vi her kan løse ligningssystemet ved å gange med A^{-1} fra høyre — dvs. vi deler fra høyre.

Vær oppmerksom på at kommandoene ovenfor bare fungerer etter beskrivelsen når A er en inverterbar, kvadratisk matrise; vil du løse andre typer ligningssystemer, må du bruke teknikkene vi har sett på tidligere i dette kapitlet. (Advarsel: Det kan hende at du får svar på kommandoen `>> x=A\b` selv om matrisen A ikke er kvadratisk, men løsningen kan da ha en annen tolkning — prøv `>> help mldivide` for mer informasjon).

4.6 Lineærkombinasjoner og basiser

Anta at vi har n vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$. En vektor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ kalles en *lineærkombinasjon* av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ dersom det finnes tall $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ slik at

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b} \tag{4.6.1}$$

Vi kan tenke på dette som en ligning der $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ og $\mathbf{b}$ er gitt, og der vi ønsker å finne $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

I lineær algebra er det svært viktig å vite når en vektor $\mathbf{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av en utgangsmengde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, og på hvor mange måter dette kan gjøres. Det viser seg at dette bare er en ny vri på de spørsmålene vi allerede har studert i dette kapitlet. For å se dette skriver vi vektorene på komponentform på denne måten

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

og

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Ligning (4.6.1) kan nå skrives

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

og trekker vi sammen venstresiden får vi

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Det å finne en lineærkombinasjon av typen (4.6.1) er altså det samme som å løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Eksempel 1: Skriv

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon av

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Vi må altså finne tall x_1, x_2 (hvis mulig!) slik at

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Det tilsvarende ligningssystemet er

$$\begin{aligned} 3x_1 + 7x_2 &= 1 \\ -x_1 + x_2 &= 3 \\ 2x_1 + 4x_2 &= 0 \end{aligned}$$

med utvidet matrise

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer på vanlig måte

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 7 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+2I}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\substack{\frac{1}{10}II \\ \frac{1}{6}III}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(-1)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi går tilbake til ligningene

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= -3 \\ x_2 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

som gir $x_2 = 1$ og $x_1 = -3 + x_2 = -2$. □

Vi legger merke til at vi hadde litt "flaks" i eksemplet ovenfor i og med at vi fikk $0 = 0$ i den siste ligningen. Det gjenspeiler at en vektor i $\mathbb{R}^3$ vanligvis ikke kan skrives som en lineærkombinasjon av to gitte vektorer — vi trenger faktisk litt flaks for å få det til! Vi skal nå se nærmere på når en vektor kan skrives som lineærkombinasjoner av andre vektorer — med eller uten "flaks".

Setning 4.6.1 *Anta at*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

er vektorer i $\mathbb{R}^m$. For å undersøke om $\mathbf{b}$ *kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, radreduserer vi matrisen*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_2 & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

til en trappematrise C. Da gjelder

(i) Dersom den siste søylen i C er en pivotsøyle, er $\mathbf{b}$ ikke *en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.*

Dersom den siste søylen i C ikke *er en pivotsøyle, har vi videre:*

(ii) Dersom alle de andre søylene i C er pivotsøyler, kan $\mathbf{b}$ *skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på nøyaktig én måte.*

(iii) Dersom minst én av de andre søylene i C ikke *er en pivotsøyle, kan* $\mathbf{b}$ *skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på uendelig mange måter.*

Bevis: Dette er bare en omformulering av setning 4.2.4. □

Et viktig spørsmål er når *alle* vektorer $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^n$ kan skrives som en lineærkombinasjon av en gitt samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Dette er bare en omformulering av setning 4.2.6.

Setning 4.6.2 *Anta at*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

er vektorer i $\mathbb{R}^m$, og at matrisen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_2 & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen C. Da kan enhver vektor $\mathbf{b}$ i $\mathbb{R}^m$ skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ hvis og bare hvis alle radene i C inneholder et pivotelement.

Bevis: Som allerede nevnt er dette bare en omskrivning av setning 4.2.6. $\square$

Anta at vi har en samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ i $\mathbb{R}^m$. Med *spennet*

$$Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

til $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ mener vi mengden av alle vektorer $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ som kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$. Setning 4.6.1 forteller oss hvordan vi kan sjekke om en spesiell vektor $\mathbf{b}$ hører til $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$, mens setning 4.6.2 forteller oss hvordan vi kan sjekke om *alle* vektorer i $\mathbb{R}^m$ hører til $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. I det siste tilfellet er $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^m$ og vi sier at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *utspenner hele* $\mathbb{R}^m$. Setningen ovenfor har en viktig konsekvens:

Korollar 4.6.3 *Dersom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$, er $n \geq m$.*

Bevis: La A være matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som søyler, og radreduser A til trappematrisen C. Dersom vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ utspenner hele $\mathbb{R}^m$, må C ha et pivotelement i hver rad, og det er det bare plass til om $n \geq m$. $\square$

Det er ikke så vanskelig å få en viss geometrisk forståelse av korollaret i $\mathbb{R}^3$: Har du to vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^3$, vil alle lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ ligge i planet som går gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$. Du trenger en tredje vektor, som ikke ligger i dette planet, for å kunne skrive enhver vektor i $\mathbb{R}^3$ som en lineærkombinasjon.

Lineær uavhengighet

Vi skal være spesielt interessert i situasjoner der elementene i

$$Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

kan skrives som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på en *entydig* måte, dvs. at det for hver $\mathbf{b} \in Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ finnes nøyaktig ett sett av tall $x_1, x_2, \ldots, x_n$ slik at $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$.

Definisjon 4.6.4 *Vi sier at vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ er* lineært uavhengige *dersom hver $\mathbf{b} \in Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ på en entydig måte. Hvis vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ ikke er lineært uavhengige, sier vi at de er* lineært avhengige.

Det er ofte nyttig å formulere lineær uavhengighet på en annen måte:

Setning 4.6.5 *Vektorene* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ *er lineært uavhengig hvis og bare hvis følgende betingelse er oppfylt:*

> *En lineærkombinasjon* $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$ *av* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *er bare lik* $\mathbf{0}$ *dersom* alle *koeffisientene* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *er lik* 0.

Bevis: Anta først at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er linært uavhengige. Vi kan opplagt skrive $\mathbf{0}$ som lineærkombinasjonen

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_n$$

Siden lineærkombinasjoner av lineært uavhengige vektorer er entydige, betyr dette at hvis

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

så er $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Anta så at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *ikke* er linært uavhengige. Da må det finnes en vektor $\mathbf{b}$ som kan skrives som en lineærkombinasjon på to forskjellige måter:

$$\mathbf{b} = y_1\mathbf{a}_1 + y_2\mathbf{a}_2 + \cdots + y_n\mathbf{a}_n$$

$$\mathbf{b} = z_1\mathbf{a}_1 + z_2\mathbf{a}_2 + \cdots + z_n\mathbf{a}_n$$

Trekker vi disse to ligningene fra hverandre, får vi

$$\mathbf{0} = (y_1 - z_1)\mathbf{a}_1 + (y_2 - z_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (y_n - z_n)\mathbf{a}_n$$

Velger vi $x_1 = y_1 - z_1, x_2 = y_2 - z_2, \ldots, x_n = y_n - z_n$, må minst én av disse x_i-ene være forskjellig fra 0 (siden de to lineærkombinasjonene ovenfor er forskjellige), og vi ser dermed at

$$\mathbf{0} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n$$

er oppfylt uten at alle $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er lik null . $\square$

Våre gamle resultater kan nå brukes til å sjekke når vektorer er lineært uavhengige:

Setning 4.6.6 *Anta at*

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

er vektorer i $\mathbb{R}^m$, *og at matrisen*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{2} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

kan radreduseres til trappematrisen C. Da er $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ lineært uavhengige hvis og bare hvis alle søylene i C er pivotsøyler.

Bevis: Fra forrige setning vet vi at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ er lineært uavhengige hvis og bare hvis ligningen

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0} \tag{4.6.2}$$

har en entydig løsning $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. Den utvidede matrisen til denne ligningen er

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi denne matrisen til trappeform, vil den siste søylen fortsatt bestå av nuller, mens resten av matrisen vil være lik C. Vi ser dermed at (4.6.2) har en entydig løsning hvis og bare hvis alle søylene i C er pivotsøyler. □

Eksempel 2: Vi skal undersøke om vektorene

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

er lineært uavhengige. Først organiserer vi vektorene som en matrise

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \\ 4 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Putter vi denne inn i MATLAB og kjører `rref`, ser vi at den reduserte trappeformen til A er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siden denne matrisen bare har pivotsøyler, er vektorene våre lineært uavhengige. ♣

Før vi går videre, tar vi med en viktig konsekvens av setningen ovenfor.

Korollar 4.6.7 *En lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^m$ har m eller færre elementer.*

Bevis: Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$, og la A være matrisen med disse vektorene som søyler. Reduser A til en trappematrise C. Skal vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ være lineært uavhengige, må C ha et pivotelement i hver søyle, og det er det bare plass til hvis $n \leq m$. □

Anta nå at vi har en samling vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som utspenner $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$. Vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ vil vanligvis ikke være lineært uavhengige, og for noen formål er det en stor ulempe. Det neste resultatet viser at det alltid er mulig å plukke ut *noen* av vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ slik at vi får en lineært uavhengig mengde som utspenner hele $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$.

Setning 4.6.8 *Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er en samling ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da er det mulig å finne en lineært uavhengig delmengde $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$ av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ slik at*

$$Sp(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}) = Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

Bevis: Vi organiserer først de opprinnelige vektorene som en matrise

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

og radreduserer denne til vi får en matrise C på trappeform. Vi fjerner så de søylene i C som *ikke* er pivotsøyler, og står da igjen med en matrise C' der alle søylene er pivotsøyler. Vi går tilbake til A og fjerner de samme søylene der som vi fjernet i C. Dette gir oss en matrise A' som inneholder noen av søylene i A. Vi ser at vi kan radredusere A' til C' ved å bruke de samme radoperasjonene som reduserte A til C. Dette betyr at A' er radekvivalent med en trappematrise med bare pivotsøyler, og følgelig er søylene i A' lineært uavhengige.

For å fullføre beviset må vi vise at enhver vektor $\mathbf{b}$ som er en lineærkombinasjon av søylene i A, også er en lineærkombinasjon av søylene i A'. Hvis vi radreduserer den utvidede matrisen $(A, \mathbf{b})$ ved å bruke de samme operasjonene som ovenfor, vet vi fra setning 4.6.1 at den siste søylen *ikke* er en pivotsøyle. Dersom vi isteden radreduserer $(A', \mathbf{b})$ ved å bruke de samme operasjonene, vil heller ikke her den siste søylen være en pivotsøyle (det skyldes at vi ikke "mister" noen pivotelementer når vi bytter ut A med A'). Ifølge setning 4.6.1 er da $\mathbf{b}$ en lineærkombinasjon av søylene i A'. □

Legg merke til at beviset ovenfor inneholder en metode for hvordan man finner de lineært uavhengige elementene $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_k}$; man organiserer de opprinnelige vektorene som en matrise A, radreduserer denne til trappeform, og plukker ut de søylene i A som korresponderer til pivotsøyler i trappeformen.

Eksempel 3: La

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi skal finne en lineært uavhengig delmengde som utspenner $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4)$. Bruker vi MATLAB, får vi

```
A=[1 -2 3 4
2 0 2 -1
-1 2 -3 0
-1 1 -2 2
0 3 -3 2];

>>C=rref(B)

C =

     1     0     1     0
     0     1    -1     0
     0     0     0     1
     0     0     0     0
     0     0     0     0
```

Vi ser at den første, andre og fjerde søylen er pivotsøyler. Mengden vi er på jakt etter er da de tilsvarende søylene i A, nemlig

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

□

Basiser

Basis er kanskje det viktigste begrepet i lineær algebra. Basiser brukes til så mangt, men i dette kapitlet skal vi hovedsakelig benytte dem til å studere egenverdier og egenvektorer. Før vi kommer så langt, trenger vi en kort innføring i noen grunnleggende egenskaper. Vi begynner med definisjonen:

Definisjon 4.6.9 *En basis for* $\mathbb{R}^m$ *er en lineært uavhengig mengde vektorer* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *som utspenner hele* $\mathbb{R}^m$*, dvs. at* $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \mathbb{R}^m$*.*

Det er lett å se at enhver basis for $\mathbb{R}^m$ må ha nøyaktig m elementer — korollar 4.6.3 forteller oss nemlig at en mengde som utspenner hele $\mathbb{R}^m$ må ha minst m elementer, mens korollar 4.6.7 forteller oss at ingen lineært uavhengig mengde i $\mathbb{R}^m$ kan ha flere enn m elementer. Den enkleste basisen er den som består av enhetsvektorene

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette kalles ofte *standardbasisen* i $\mathbb{R}^m$. Det neste resultatet gjør det lett å finne andre basiser.

Setning 4.6.10 *Enhver lineært uavhengig mengde i* $\mathbb{R}^m$ *med* m *elementer er en basis.*

Bevis: Anta at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er lineært uavhengige, la A være matrisen med disse vektorene som søyler, og la C være en trappematrise som fremkommer når vi radreduserer A. Siden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er lineært uavhengige, har C et pivotelement i hver søyle. Siden C er kvadratisk, er det bare plass til dette dersom C har et pivotelement i hver rad, og dermed må $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ generere hele $\mathbb{R}^m$. □

Det neste resultatet gjør det enda lettere å finne basiser — det forteller oss at enhver lineært uavhengig mengde kan utvides til en basis:

Setning 4.6.11 *Anta at* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ *er en lineært uavhengig mengde av vektorer i* $\mathbb{R}^m$*. Da finnes det vektorer* $\mathbf{a}_{n+1}$*,* $\mathbf{a}_{n+2}$ *,...,* $\mathbf{a}_m$ *slik at* $\mathbf{a}_1$*,* $\mathbf{a}_2$*, ...,* $\mathbf{a}_n$*,* $\mathbf{a}_{n+1}$*, ...,* $\mathbf{a}_m$ *er en basis for* $\mathbb{R}^m$*.*

Bevis: La A være matrisen med $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ som søyler, og radreduser A til en trappematrise C. Siden vektorene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ er lineært uavhengige, er alle søyler i C pivotsøyler. Det betyr at pivotelementene starter øverst i venstre hjørne av matrisen og fortsetter nedover diagonalen inntil de treffer høyre kant av matrisen. Utvid C til en kvadratisk matrise C' ved å skjøte på flere søyler med pivotelementer på diagonalen. Reverser de radoperasjonene som forvandlet A til C, og bruk dem til å forvandle C' til en matrise A'. Da er A' en utvidelse av A (det er kommet til nye søyler bakerst), og søylene i

A' er lineært uavhengige siden A' er radekvivalent med en matrise C' som bare har pivotsøyler. $\square$

Beviset ovenfor blir lettere å forstå hvis vi gjennomfører prosedyren på et eksempel:

Eksempel 4: Vi skal utvide mengden

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

til en basis for $\mathbb{R}^4$. Vi begynner med å radredusere matrisen som har $\mathbf{a}_1$ og $\mathbf{a}_2$ som søyler:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{III+2I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overset{IV+I}{\sim}$$

$$\overset{IV+I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{III+\frac{2}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{IV+II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Vi har nå fått matrisen på så god trappeform som vi trenger (for å få skikkelig trappeform bør vi gjøre om "pivotelementene" -1 og -5 til 1'ere, men det fører bare til dobbeltarbeid i dette tilfellet). Nest skritt er å skjøte på C slik at vi får en diagonalmatrise med pivotelementer på diagonalen:

$$C' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Til slutt bruker vi radoperasjonene ovenfor baklengs:

$$C' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV-II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-\frac{2}{5}II}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{IV-I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III-2I}{\sim}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{II+3I}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A'$$

Dette viser at

$$a_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er en basis. ♣

Bemerkning: Det kan virke på eksemplet ovenfor som om den siste delen av prosessen (nemlig å gå tilbake fra C' til A') er unødvendig siden de siste to søylene ikke endrer seg. Dette skyldes at vi ikke har noe radombytte blant operasjonene våre — med en gang et slikt ombytte dukker opp, risikerer vi å måtte gjøre endringer i de siste to søylene. La oss legge til at det er mange andre metoder man kan bruke for å utvide en lineært uavhengig mengde til en basis, og at metoden ovenfor slett ikke er den raskeste.

Basiser og lineæravbildninger

Det er ikke så lett å se på dette stadiet hvorfor basiser er så viktige, men vi skal prøve å antyde det. Den aller viktigste grunnen er at basiser spiller en sentral rolle når man skal studere lineæravbildninger. Husk (fra seksjon 2.8) at en lineæravbildning fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ som tilfredsstiller kravene:

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Ifølge setning 2.8.2 medfører disse kravene at

$$\mathbf{T}(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k) = c_1\mathbf{T}(\mathbf{x}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{x}_2) + \cdots + c_k\mathbf{T}(\mathbf{x}_k)$$

for alle $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$.

Anta nå at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er en lineæravbildning. Anta også at vi kjenner hvordan $\mathbf{T}$ virker på basisvektorene $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, la oss si at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$. Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis, kan en hvilket som helst vektor $\mathbf{x}$ skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. Bruker vi $\mathbf{T}$ på dette uttrykket, får vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) =$$

$$c_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + c_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \cdots + c_n\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 + \cdots + c_n\mathbf{w}_n$$

Dette betyr at dersom vi vet hvordan $\mathbf{T}$ virker på elementene i en basis, så vet vi også hvordan den virker på alle andre vektorer.

Vi kan snu problemstillingen ovenfor på hodet. Anta at vi ikke har en lineæravbildning $\mathbf{T}$, men at vi ønsker å *definere* er lineæravbildning $\mathbf{T}$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots,$ $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$ (dette er en meget vanlig problemstilling i lineær algebra). Den neste setningen forteller oss at dette alltid er mulig:

Setning 4.6.12 *Anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ $, \ldots,$ $\mathbf{w}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^m$. Da finnes det nøyaktig én lineæravbildning $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots,$ $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$.*

Bevis: Argumentet ovenfor viser at det høyst kan være én slik lineæravbildning. For å vise at det virkelig finnes en, bruker vi at siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er en basis, kan enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

på nøyaktig én måte. Vi kan derfor *definere* en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ved

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$$

Siden vi åpenbart har $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2, \ldots,$ $\mathbf{T}(\mathbf{v}_n) = \mathbf{w}_n$, er det nok å vise at $\mathbf{T}$ er en lineæravbildning, dvs. at den tilfredsstiller betingelsene (i) og (ii) ovenfor.

For å vise (i), observerer vi at hvis

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

så er

$$c\mathbf{x} = cx_1\mathbf{v}_1 + cx_2\mathbf{v}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{v}_n$$

Dermed er

$$\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = cx_1\mathbf{w}_1 + cx_2\mathbf{w}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{w}_n$$

På den annen side er

$$c\mathbf{T}(\mathbf{x}) = c(x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n) =$$

$$= cx_1\mathbf{w}_1 + cx_2\mathbf{w}_2 + \cdots + cx_n\mathbf{w}_n$$

Dette viser at $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$, så betingelse (i) er oppfylt.

For å vise at betingelse (ii) er oppfylt, begynner vi med to vektorer

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n$$

$$\mathbf{y} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n$$

Da er

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) + (y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n) =$$

$$= (x_1+y_1)\mathbf{v}_1 + (x_2+y_2)\mathbf{v}_2 + \ldots + (x_n+y_n)\mathbf{v}_n$$

og følgelig

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_1+y_1)\mathbf{w}_1 + (x_2+y_2)\mathbf{w}_2 + \ldots + (x_n+y_n)\mathbf{w}_n$$

På den annen side er

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = x_1\mathbf{w}_1 + x_2\mathbf{w}_2 + \cdots + x_n\mathbf{w}_n$$

og

$$\mathbf{T}(\mathbf{y}) = y_1\mathbf{w}_1 + y_2\mathbf{w}_2 + \cdots + y_n\mathbf{w}_n$$

Det betyr at $\mathbf{T}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x})+\mathbf{T}(\mathbf{y})$, og følgelig er betingelse (ii) oppfylt. $\square$

Man kan lure på hvorfor det er bruk for andre basiser i $\mathbb{R}^n$ enn standardbasisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Svaret er ganske enkelt at i mange eksempler gir andre basiser enklere regninger og mer informative svar — spesielt gjelder dette basiser som består av egenvektorer for den lineæravbildningen vi studerer. Husk at en *egenvektor* for en lineæravbildning $\mathbf{T}$ er en vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \neq \mathbf{0}$ slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ for et eller annet tall λ (λ kalles *egenverdien* til $\mathbf{v}$). Egenvektorer er spesielt nyttige når vi skal studere gjentatt bruk av avbildningen $\mathbf{T}$ siden $\mathbf{T}^n(\mathbf{v}) = \lambda^n\mathbf{v}$.

Anta nå at vi har en basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ av egenvektorer for $\mathbf{T}$ med egenverdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Enhver vektor $\mathbf{x}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2, \ldots, c_n\mathbf{v}_n$$

Bruker vi $\mathbf{T}^n$ på dette uttrykket, får vi

$$\mathbf{T}^n(\mathbf{x}) = c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\lambda_n^n\mathbf{v}_n$$

Dersom en av egenverdiene (la oss si λ_1) er større enn de andre i tallverdi, vil leddet den tilhører dominere over de andre når n blir stor. Det betyr at størrelsesordenen til $\mathbf{T}^n(\mathbf{x})$ vokser som λ_1^n, og at fordelingen mellom komponentene i vektoren $\mathbf{T}^n(\mathbf{x})$ blir mer og mer som fordelingen mellom komponentene i $\mathbf{v}_1$. Som vi skal se senere, er informasjon av denne typen uhyre viktige når man skal studere systemer som utvikler seg med tiden.

Det viser seg at de fleste (men ikke alle!) lineæravbildninger har en basis av egenvektorer. Senere i dette kapitlet skal vi lære mer om hvordan vi kan finne egenverdier og egenvektorer.

4.7 Elementære matriser

Alt vi hittil har gjort i dette kapitlet er basert på radoperasjoner. I denne seksjonen skal vi se at det å utføre en radoperasjon, kan tolkes som multiplikasjon med en spesiell type matrise — en såkalt *elementær matrise.* I utgangspunktet kan dette virke som en ganske pussig og unyttig observasjon, men som vi skal se senere, har den mer sprengkraft enn man skulle tro. La oss begynne med definisjonen:

Definisjon 4.7.1 *En $m \times m$* elementær matrise *er en matrise som fremkommer når vi gjør én radoperasjon på identitetsmatrisen I_m. Enhver elementær matrise* korresponderer *altså til en radoperasjon.*

Siden det finnes tre typer radoperasjoner, finnes det også tre typer elementære matriser.

(i) Elementære matriser som fremkommer ved å bytte om to rader i identitetsmatrisen: Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der vi har byttet om rad 2 og 4.

(ii) Elementære matriser der vi har ganget en av radene i identitetsmatrisen med et tall forskjellig fra 0: Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der tredje rad er ganget med -3.

(iii) Elementære matriser der vi har lagt et multiplum av en rad til en av de andre radene: Et typisk eksempel er

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

der vi har lagt -2 ganger rad 4 til rad 2.

Den grunnleggende observasjonen om elementære matriser er denne.

Setning 4.7.2 *Anta at E er en elementær $m \times m$-matrise og la A være en vilkårlig $m \times n$-matrise. La A' være den matrisen vi får når vi bruker radoperasjonen som korresponderer til E på A. Da er $A' = EA$.*

Bevis: Det er lettest å sjekke dette selv ved å se hva som skjer når vi ganger en matrise med de forskjellige typene elementære matriser. □

Den neste setningen er helt essensiell for å utnytte elementære matriser.

Setning 4.7.3 *Enhver elementær matrise er inverterbar, og den inverse er også en elementær matrise.*

Bevis: Vi har allerede observert (se seksjon 4.2) at enhver radoperasjon kan "reverseres", det vil si at det finnes en annen radoperasjon som fører matrisen tilbake til utgangspunktet. Det er lett å sjekke at de korresponderende elementærmatrisene er inverse. Vi sjekker dette for det vanskeligste tilfellet som er elmentærmatriser av type (iii) ovenfor:

Anta at E er elementærmatrisen som tilsvarer å addere s ganger rad j til rad i. Den inverse matrisen E' er da den som tilsvarer å addere $-s$ ganger rad j til rad i. Det er lett å sjekke at $E'E = I_n$: Sammenlignet med identitetsmatrisen har E en komponent s "for mye" i posisjon (i, j), og E' fjerner denne ved å addere $-s$ i komponent (i, j). □

Vi har nå kommet frem til det første hovedresultatet vårt.

Setning 4.7.4 *Enhver $m \times n$-matrise A kan skrives som et produkt*

$$A = E_1 E_2 \dots E_k B$$

der $E_1, E_2, \dots, E_k$ er elementære matriser og B er den reduserte trappeformen til A. Dersom A er en inverterbar, kvadratisk matrise, kan A altså skrives som et produkt $A = E_1 E_2 \dots E_k$ av elementære matriser.

Bevis: Vi vet at A kan omdannes til B ved hjelp av en sekvens av radoperasjoner. Hvis $F_1, F_2, \dots, F_k$ er de korresponderende elementærmatrisene, vet vi fra setning 4.7.2 at

$$B = F_k \dots F_2 F_1 A$$

Ganger vi denne ligningen fra venstre med $F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1}$, får vi

$$F_1^{-1} F_2^{-1} \cdots F_k^{-1} B = A$$

Setter vi $E_1 = F_1^{-1}, E_2 = F_2^{-1}, \dots, E_k = F_k^{-1}$, vet vi fra setningen ovenfor at $E_1, E_2, \dots, E_k$ er elementære matriser. Dermed er

$$E_1 E_2 \dots E_k B = A$$

som er formelen i setningen. Dersom A er en inverterbar, kvadratisk matrise, er $B = I_n$ og vi får

$$A = E_1 E_2 \dots E_k I_n = E_1 E_2 \dots E_k$$

□

Bemerkning: Legg merke til at de elementære matrisene i setningen ovenfor er de inverse til dem som omdanner A til redusert trappeform, og at de kommer i omvendt rekkefølge.

Vi skal også se raskt på sammenhengen mellom elementære matriser og transponering. Husk at den transponerte matrisen A^T til A er den matrisen vi får når vi bytter om rader og søyler

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Setning 4.7.5 *Den transponerte E^T til en elementær matrise E er selv en elementær matrise. Dersom E korresponderer til å bytte om to rader eller til å gange en rad med et tall s, så er $E = E^T$. Dersom E korresponderer til å addere s ganger linje j til linje i, så korresponderer E^T til å addere s ganger linje i til linje j.*

Bevis: Dette er greit å sjekke selv. □

Kombinert med neste resultat vil setningen ovenfor komme til nytte når vi i neste seksjon skal regne ut determinanten til den transponerte matrisen.

Setning 4.7.6 *Anta at $A = E_1 E_2 \dots E_k B$ der $E_1, E_2, \dots, E_k$ er elementære matriser og B er på redusert trappeform. Da er*

$$A^T = B^T E_k^T \dots E_2^T E_1^T$$

Bevis: Det følger fra setning 1.5.2(v) at den transponerte til et produkt er produktet av de transponerte i omvendt rekkefølge, dvs. $(A_1 A_2 \dots A_k)^T = A_k^T \dots A_2^T A_1^T$. Setningen følger umiddelbart fra dette. □

4.8 Determinanter

I seksjon 3.2 studerte vi 2×2- og 3×3-determinanter, og vi kikket så vidt på hvordan man kan definere determinanten til 4×4- og 5×5-matriser. I denne seksjonen skal vi se på teorien for generelle $n \times n$-determinanter. Definisjonen følger det samme mønsteret som tidligere — hvis vi allerede vet hvordan vi regner ut $(n-1)\times(n-1)$-determinanter, definerer vi $n\times n$-determinanter ved hjelp av denne formelen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

Vi ser hvordan mønsteret er: Hvert element i den første raden ganges med den $(n-1)\times(n-1)$-determinanten vi får når vi stryker raden og søylen gjennom elementet. Alle leddene legges så sammen med alternerende (skiftende) fortegn.

Eksempel 1: Vi skal starte utregningen av 5×5-determinanten

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

(det blir for mye kjedelig arbeid å gjennomføre hele beregningen!) Ifølge definisjonen ovenfor er

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+(-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Nå fortsetter du på samme måte med hver av 4×4-determinantene osv. □

Eksemplet ovenfor viser at definisjonen er ubrukelig til å regne ut verdien til store determinanter. Det er heller ikke så lett å se de teoretiske egenskapene til determinanter direkte fra definisjonen. Vi skal derfor bruke litt tid på å beskrive determinanter på andre måter.

Bemerkning: Determinanter er definert *induktivt* ved at vi definerer determinanter av en viss størrelse ved hjelp av determinanter én størrelse mindre. Dette medfører at induksjonsbevis er en naturlig bevismetode når man skal vise egenskaper ved determinanter. Er du uvant med induksjonsbevis (eller synes bevisene nedenfor er vanskelige å forstå), kan det være lurt å ta en kikk på seksjon 1.2 i *Kalkulus*.

Vi skal først se på noen tilfeller der determinanten er spesielt enkel å regne ut.

Lemma 4.8.1 *Anta at enten en rad eller en søyle i matrisen A bare består av nuller. Da er* $\det(A) = 0$.

Bevis: Vi ser på tilfellet der en søyle er null — beviset for det andre tilfellet ligner, men er litt lettere.

Vi skal vise resultatet for $n \times n$-matriser ved induksjon på n. Det er lett å sjekke at en 2×2-determinant er null dersom en av søylene er null. Anta at resultatet holder for $n \times n$-matriser, og at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise der j-te søyle er 0. Ifølge definisjonen er

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = \\
&= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,j} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots \\
\cdots &+ (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots \\
\cdots &+ (-1)^{n+2} a_{1,n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

I dette uttrykket er leddet

$$(-1)^{j+1}a_{1j}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

null fordi $a_{1j} = 0$. De andre leddene er null fordi determinanten inneholder en rad som bare består av nuller, og induksjonshypotesen forteller oss at en slik $n \times n$-determinant er null. □

De neste matrisene vi skal beregne determinanten til, er triangulære matriser. Vi kaller en kvadratisk matrise *øvre triangulær* dersom alle elementene under diagonalen er null, og vi kaller den *nedre triangulær* dersom alle elementer over diagonalen er null. Matrisen A nedenfor er øvre triangulær, mens B er nedre triangulær:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Legg merke til at alle trappematriser er øvre triangulære.

Lemma 4.8.2 *Dersom matrisen A er øvre eller nedre triangulær, er determinanten til A lik produktet av elementene på diagonalen til A.*

Bevis: Vi skal bare vise resultatet for øvre triangulære matriser — beviset for nedre triangulære matriser går på samme måte, men er lettere. Også i dette tilfellet går beviset ved induksjon på størrelsen til A. Er A en øvre triangulær 2×2-matrise $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$, ser vi at $\det(A) = ad - 0b = ad$, så resultatet stemmer for 2×2-matriser.

Anta nå at resultatet stemmer for øvre triangulære $n \times n$-matriser, og la

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

være en øvre triangulær $(n+1) \times (n+1)$-matrise. Vi har

$$\det(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} 0 & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2}a_{1,n+1}\begin{vmatrix} 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}$$

der vi har brukt det forrige lemmaet til å kvitte oss med de determinantene som har en søyle med bare nuller. Ifølge induksjonshypotesen er

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33}\cdots a_{n+1,n+1}$$

og dermed får vi $\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{n+1,n+1}$. □

Determinanter og radoperasjoner

Vi er nå klare til å starte et litt større prosjekt — vi skal undersøke hva som skjer med determinanten til en matrise når vi utfører en radoperasjon. Dette vil gi oss en mer effektiv måte å regne ut determinanter på, og det vil også gi oss en bedre forståelse av hva determinanter er. Inspirasjon til arbeidet finner vi i setningene 3.2.3 og 3.2.5 som forteller oss hva som skjer med 2×2- og 3×3-determinanter når vi bruker radoperasjoner. Målet er å vise tilsvarende resultater for generelle determinanter. Dette krever en del arbeid (og tålmodighet!)

Vi starter med den enkleste radoperasjonen.

Lemma 4.8.3 *Anta at B er den matrisen vi får når vi ganger den i-te raden i A med tallet s. Da er $\det(B) = s\det(A)$.*

Bevis: Igjen bruker vi induksjon på størrelsen til matrisen A. Hvis A er en 2×2-determinant, er påstanden lett å sjekke (vi kjenner den dessuten fra setning 3.2.3). Anta nå at setningen holder for $n \times n$-matriser, og at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise. Anta først at B er den matrisen vi får når vi ganger den første raden i A med s. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \dots & sa_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{21} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= sa_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-sa_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} sa_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = s\det(A)$$

der vi har brukt at hvert ledd i uttrykket for $\det(B)$ har en ekstra s sammenlignet med uttrykket for $\det(A)$.

La oss nå anta at det er en rad $i > 1$ som ganges med s. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i2} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i2} & sa_{i3} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i3} & \cdots & sa_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ sa_{i1} & sa_{i2} & \cdots & sa_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} =$$

$$= sa_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-sa_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i3} & \dots & a_{i,n+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \dots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} sa_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \dots & a_{n+1,n} \end{vmatrix} = s\det(A)$$

der vi har brukt induksjonshypotesen til å trekke s utenfor $n\times n$-matrisene. □

Vi skal nå se på hva som skjer når vi bytter om to rader. Dette er litt komplisert, men nøkkelen ligger i først å vise hva som skjer når vi bytter om de to øverste radene.

Lemma 4.8.4 *Anta at B er den matrisen vi får når vi bytter om de to øverste radene i A. Da er* $\det(A) = -\det(B)$.

Bevis: Vi tenker oss A er en $n \times n$-matrise og at vi gjennomfører de to første skrittene i utregningen av $\det(A)$ — først uttrykker vi $\det(A)$ ved hjelp av $(n-1) \times (n-1)$-matriser, og så uttrykker vi hver av disse igjen ved hjelp av $(n-2) \times (n-2)$-matriser. De $(n-2) \times (n-2)$-matrisene vi nå har, er fremkommet ved at vi har fjernet de to øverste radene i A samt to av søylene. Dersom $i < j$, lar vi A_{ij} være den $(n-2) \times (n-2)$-determinanten vi får når vi fjerner den i-te og den j-te søylen i tillegg til de to første radene. I utregningene våre oppstår denne determinanten på to måter: Vi kan enten fjerne den i-te søylen i første omgang og den j-te søylen i andre, eller omvendt. I det første tilfellet får vi en faktor $(-1)^{i+1}a_{1i}$ i første omgang og en faktor $(-1)^j a_{2j}$ i andre omgang (observer at siden $i < j$, har a_{2j} nå rykket frem til $(j-1)$-te søyle, og fortegnsfaktoren blir derfor $(-1)^j$ og ikke $(-1)^{j+1}$ som man kanskje ville vente). Totalt gir dette en faktor $(-1)^{1+j+1}a_{1i}a_{2j}$. I det andre tilfellet får vi en faktor $(-1)^{j+1}a_{1j}$ i første omgang og en faktor $(-1)^{i+1}a_{2i}$ i andre omgang. Totalt gir dette en faktor $(-1)^{i+j+2}a_{1j}a_{2i}$. Alt i alt har vi dermed et bidrag til $\det(A)$ på

$$(-1)^{1+j+1}\left(a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}\right) A_{ij} \tag{4.8.1}$$

Dersom vi gjør tilsvarende beregninger for B, får vi samme svar bortsett fra at elementene i første og annen rad har byttet plass. Dette gir et bidrag på

$$(-1)^{1+j+1}\left(a_{2i}a_{1j} - a_{2j}a_{1i}\right) A_{ij} \tag{4.8.2}$$

Disse uttrykkene er motsatt like store, og dermed ser vi at $\det(B) = -\det(A)$. $\square$

La oss utvide resultatet til alle naborader:

Lemma 4.8.5 *Anta at B er en matrise som fremkommer ved at vi bytter om to naborader i A. Da er* $\det(B) = -\det(A)$*.*

Bevis: Det er lett å se at resultatet holder for 2×2-matriser, og vi bruker induksjon til å vise det generelt. Vi antar at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise, og at resultatet holder for $n \times n$-matriser. Dersom vi bytter om de to første radene, følger resultatet fra foregående lemma. Dersom vi bytter om to andre rader, følger resultatet fra induksjonshypotesen. Vi har nemlig

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{j+1} a_{1j} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^{n+2} a_{1,n+1} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Når vi bytter om de to radene i $\det(A)$, bytter vi også om to rader i hver av de mindre determinantene. Ifølge induksjonshypotesen bytter de da fortegn, og dermed bytter $\det(A)$ fortegn. $\square$

Til slutt utvider vi resultatet til alle rader.

Lemma 4.8.6 *Dersom B fremkommer ved at vi bytter om to rader i A, så er* $\det(B) = -\det(A)$*.*

Bevis: Vi kan bytte om to vilkårlige rader ved systematisk ombytte av naborader: Anta at vi skal bytte om rad i og rad $i+k$. Vi bytter først om rad $i+k$ med rad $i+k-1$, deretter bytter vi den med rad $i+k-2$ osv. Etter k slike bytter, har raden flyttet seg til i-te posisjon, og den opprinnelige rad i er skjøvet ned til $(i+1)$-te posisjon. Vi bytter nå denne raden nedover til den er i $i+k$-te posisjon — dette tar $k-1$ nabobytter. Nå er vi fremme ved matrisen B og har foretatt $2k-1$ ombytter av naborader. Det betyr at determinanten har byttet fortegn et odde antall ganger, og følgelig er $\det(B) = -\det(A)$. □

Før vi går videre, tar vi med oss en nyttig konsekvens av resultatet ovenfor.

Korollar 4.8.7 *Dersom to av radene i A er like, er* $\det(A) = 0$.

Bevis: Dersom vi bytter om de to like radene, vil determinanten ifølge lemmaet ovenfor bytte fortegn. Men determinanten har jo ikke endret seg siden radene vi byttet om var like. Den eneste løsningen på dette tilsynelatende paradokset, er at $\det(A) = 0$. □

Vi er nå fremme ved den siste typen radoperasjon — de hvor vi adderer et multiplum av en rad til en annen.

Lemma 4.8.8 *Anta at B fremkommer fra A ved at vi adderer et multiplum av en av radene i A til en av de andre radene. Da er* $\det(B) = \det(A)$.

Bevis: Igjen går beviset ved induksjon på størrelsen til matrisen. For 2×2-matriser vet vi fra setning 3.2.3 at resultatet holder. Vi antar at resultatet holder for $n \times n$-matriser, og at A er en $(n+1) \times (n+1)$-matrise. Anta først at vi adderer s ganger rad j til rad i der $i > 1$. Da er

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} + sa_{j1} & a_{i2} + sa_{j2} & \cdots & a_{i,n+1} + sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i2} + sa_{j2} & a_{i3} + sa_{j3} & \cdots & a_{i,n+1} + sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1}+sa_{j1} & a_{i3}+sa_{j3} & \ldots & a_{i,n+1}+sa_{j,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix}+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n+2}a_{1,n+1}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{i1}+sa_{j1} & a_{i2}+sa_{j2} & \ldots & a_{3,n}+sa_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Siden resultatet gjelder for $n \times n$-matriser, vet vi at disse determinantene ikke endrer seg om vi fjerner "s"-leddene. Følgelig er $\det(B) = \det(A)$.

La oss nå se på det gjenstående tilfellet der vi adderer s ganger rad j til den *første* raden. Da har vi:

$$\det(B) = \begin{vmatrix} a_{11}+sa_{j1} & a_{12}+sa_{j2} & \ldots & a_{1,n+1}+sa_{j,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_{11}+sa_{j1})\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,2} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} -$$

$$-(a_{12}+sa_{j2})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\ a_{31} & a_{33} & \cdots & a_{3,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,3} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{vmatrix} + \cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n+2}(a_{1,n+1}+sa_{j,n+1})\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} \end{vmatrix}$$

Ganger vi ut parentesene og samler ledd med og uten s hver for seg, ser vi at $\det(B) = \det(A) + s\det(\tilde{A})$ der $\tilde{A}$ er den matrisen vi får når vi erstatter den første raden med den j-te (hvis du ikke ser dette direkte, så skriv opp det første trinnet i utregningen av $\det(A)$ og $\det(\tilde{A})$). Ifølge korollaret ovenfor er $\det(\tilde{A}) = 0$ siden to av radene er like. Følgelig er $\det(B) = \det(A)$ også i dette tilfellet. □

Vi har nå nådd vårt mål og kan oppsummere hva som skjer med determinanten til en matrise når vi bruker en radoperasjon.

Teorem 4.8.9 *Anta at A er en kvadratisk matrise. Da gjelder:*

(i) Hvis A er på trappeform, er determinanten lik produktet av diagonalelementene.

(ii) Bytter vi om to søyler, bytter determinanten fortegn (men beholder sin tallverdi).

(iii) Ganger vi en rad med et tall s, endres determinanten med en faktor s.

(iv) Adderer vi et multiplum av en rad til en annen rad, endres ikke determinanten

Bevis: Dette er bare en oppsummering av lemmaene 4.8.2, 4.8.3, 4.8.6 og 4.8.8. □

Resultatet ovenfor gir oss en effektiv metode til å regne ut determinanter. Selv om effektiviteten først viser seg for alvor på større matriser, illustrerer vi metoden i 3×3-tilfellet.

Eksempel 2: Vi skal regne ut determinanten til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer A mens vi holder styr på hvilke operasjoner vi bruker:

$$A \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{II+(-3)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{pmatrix} = B$$

Matrisen B er øvre triangulær, og determinanten er produktet av diagonalelementene: $\det(B) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$. Vi kan nå regne oss bakover til determinanten til A ved å bruke teoremet ovenfor — hver ganger vi bytter om to rader, bytter vi fortegn på determinanten, og hver gang vi ganger en rad med en faktor s, endrer determinanten seg med en faktor s. Den vanligste operasjonen (å addere et multiplum av en rad til en annen) endrer ikke determinanten i det hele tatt. I prosessen ovenfor er det to operasjoner som endrer determinanten — ett radombytte og en multiplikasjon med $\frac{1}{3}$. Det betyr at $\det(B) = (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \det(A)$ (husk på at det er $\det(A)$ som endres til $\det(B)$). Dermed har vi

$$\det(A) = (-1) \cdot 3 \cdot \det(B) = (-1) \cdot 3 \cdot \frac{8}{3} = -8$$

♣

Prosedyren i eksemplet ovenfor kan brukes på alle kvadratiske matriser — vil vi regne ut determinanten til A, radreduserer vi A til en trappematrise B, og regner ut determinanten til B ved å gange sammen diagonalelementene. Deretter finner vi $\det(A)$ ved formelen

$$\det(A) = s_1^{-1} s_2^{-1} \cdots s_k^{-1} \det(B)$$

der $s_1, s_2, \ldots, s_k$ er *faktorene* til de radoperasjonene vi brukte når vi reduserte A til B. Det burde være klart hva vi mener med *faktoren* til en radoperasjonen — faktoren til et radombytte er -1, faktoren til det å gange en rad med $s \neq 0$ er s, mens faktoren til det å addere et multiplum av én rad til en annen, er 1.

Prosedyren ovenfor har også viktige teoretiske konsekvenser slik det neste teoremet viser. Vi benytter anledningen til også å oppsummere noen tidligere resultater:

Teorem 4.8.10 *For $n \times n$-matriser A er følgende ekvivalent:*

(i) $\det(A) \neq 0$

(ii) A er invertibel

(iii) Matriseligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en entydig løsning for alle $\mathbf{b}$

(iv) Søylene i A er lineært uavhengige

(v) A er radekvivalent med I_n

Bevis: Vi vet allerede at (ii), (iii) og (iv) er ekvivalente med (v), så det gjenstår bare å vise at (i) er ekvivalent med (v). Anta at B er den reduserte trappeformen til A og la $s_1, s_2, \ldots, s_k$ være faktorene til de radoperasjonene vi bruker når vi reduserer A til B. Da er

$$\det(A) = s_1^{-1} s_2^{-1} \cdots s_k^{-1} \det(B)$$

og følgelig er $\det(A) \neq 0$ hvis og bare hvis $\det(B) \neq 0$. En matrise B på redusert trappeform er øvre triangulær, og determinanten er derfor lik produktet av diagonalelementene. Det betyr at determinanten er forskjellig fra null hvis og bare hvis alle pivotelementene står på diagonalen, dvs. når $B = I_n$. □

Determinanten til et produkt

Vi skal nå se hvordan vi kan bruke elementære matriser til å bevise noen viktige setninger om determinanter. Siden en elementær matrise fremkommer ved å gjøre en enkelt radoperasjon på identitetsmatrisen, er det lett å regne ut determinanten.

Lemma 4.8.11 *Anta at E er en elementær $n \times n$-matrise. Da er determinanten til E lik faktoren til den tilhørende radoperasjonen. Svarer E til å bytte om to rader, er altså $\det(E) = -1$, svarer E til å gange en rad med s, er $\det(E) = s$, og svarer E til å addere et multiplum av en rad til en annen, er $det(E) = 1$.*

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 4.8.9 siden en elementær matrise fremkommer fra identitetsmatrisen når vi bruker den korresponderende radoperasjonen. □

Dette neste lemmaet er også en omformulering av tidligere resultater.

Lemma 4.8.12 *Anta $C = EB$ der E er en elementær matrise. Da er $\det(C) = \det(E)\det(B)$.*

Bevis: Vi vet fra Setning 4.7.2 at C er den matrisen som fremkommer når vi bruker radoperasjonen til E på B. Fra Teorem 4.8.9 vet vi at da er $\det(C) = s\det(B)$, der s er faktoren til denne radoperasjonen. Ifølge foregående lemma er $s = \det(E)$, og dermed får vi $\det(C) = \det(E)\det(B)$. □

Konklusjonen i lemmaet ovenfor kan skrives slik: $\det(EB) = \det(E)\det(B)$. Målet vårt er å utvide denne formelen til alle matriser A slik at vi generelt får $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Før vi går løs på den generelle formelen, trenger vi litt informasjon om hva som skjer når en av matrisene A, B har determinant lik 0.

Lemma 4.8.13 *Anta at A og B er to $n\times n$-matriser. Da er produktmatrisen $C = AB$ inverterbar hvis og bare hvis både A og B er inverterbare.*

Bevis: Dersom både A og B er inverterbare, vet vi fra setning 1.6.4 at C er inverterbar med $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Det gjenstår dermed å vise at dersom enten A eller B *ikke* er inverterbar, så er heller ikke C inverterbar.

Anta først at B ikke er inverterbar. Den reduserte trappeformen til B mangler da pivotelement i (minst) en søyle, og ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har følgelig en løsning $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Dermed er $C\mathbf{x} = (AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x}) = A\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Dersom C var inverterbar, ville ligningen $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ bare hatt én løsning $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, så dette betyr at C ikke er inverterbar.

Anta så at A ikke er inverterbar. Da må den reduserte trappeformen mangle pivotelement i en rad, så det finnes en vektor $\mathbf{b}$ slik at ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ikke har løsning. Dermed kan heller ikke ligningen $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ha en løsning, for hvis $\mathbf{y}$ var en løsning av denne ligningen, ville $\mathbf{x} = B\mathbf{y}$ være en løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Vi har nemlig

$$A\mathbf{x} = A(B\mathbf{y}) = (AB)\mathbf{y} = C\mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Dette betyr at ligningen $C\mathbf{y} = \mathbf{b}$ ikke har løsning, og følgelig er C ikke inverterbar. □

Resultatet ovenfor forteller oss at formelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ holder dersom en av matrisene A, B er singulær (dvs. ikke inverterbar) — i så fall er en av faktorene på høyresiden lik null, og det samme er $\det(AB)$ ifølge lemmaet. Vi kan derfor konsentrere oss om å vise formelen $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ når A og B er inverterbare.

Setning 4.8.14 *For alle $n \times n$-matriser A, B er*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Bevis: Vi vet allerede at formelen stemmer når A eller B er singulær, så vi kan anta at både A og B er inverterbare. Ifølge setning 4.7.4 er da både A og B produkter av elementære matriser

$$A = E_1E_2\cdots E_m \qquad \text{og} \qquad B = F_1F_2\cdots F_k$$

Ved gjentatt bruk av lemma 4.8.12, ser vi at

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m)$$

og

$$\det(B) = \det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k)$$

Siden $AB = E_1E_2\cdots E_mF_1F_2\cdots F_k$ får vi på tilsvarende måte

$$\det(AB) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m)\det(F_1)\det(F_2)\cdots\det(F_k)$$

og følgelig er $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ □

Benerkning: Dersom vi tenker på determinanten som en forstørrelsesfaktor (se seksjon 3.2), er resultatet ovenfor som forventet — forstørrer vi først med en faktor $\det(B)$ og så med en faktor $\det(A)$, bør den samlede forstørrelsesfaktoren $\det(AB)$ være lik produktet $\det(A)\det(B)$. Vær forøvrig oppmerksom på at det ikke finnes noen enkel metode for å regne ut determinanten til en sum.

Setningen ovenfor har mange nyttige konsekvenser:

Korollar 4.8.15 *For alle inverterbare matriser A er*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Bevis: Ifølge setningen ovenfor er

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$$

□

Korollar 4.8.16 *For alle $n \times n$-matriser er*

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Bevis: Observer først at dersom E er en elementær matrise, så forteller setning 4.7.5 oss at E^T er en elementær matrise med samme faktor. Dermed er $\det(E^T) = \det(E)$ ifølge lemma 4.8.11.

Ifølge setning 4.7.4 kan enhver matrise A skrives som et produkt $A = E_1E_2\cdots E_mB$ der $E_1, E_2, \ldots, E_m$ er elementære matriser, og B er på redusert trappeform. Ifølge setningen ovenfor er

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_m)\det(B)$$

Siden $A^T = B^TE_m^T\cdots E_2^TE_1^T$ (se setning 4.7.6 om du ikke ser dette direkte), får vi tilsvarende

$$\det(A^T) = \det(B^T)\det(E_m^T)\cdots\det(E_2^T)\det(E_1^T)$$

Vi har allerede observert at $\det(E_1^T) = \det(E_1)$, $\det(E_2^T) = \det(E_2)$,..., $\det(E_m^T) = \det(E_m)$, så det er nok å vise at $\det(B^T) = \det(B)$. Siden B er en øvre triangulær matrise, er B^T nedre triangulær, og begge determinantene er da lik produktet av diagonalelementene ifølge lemma 4.8.2. Diagonalelementene endrer seg ikke når vi transponerer, og dermed er $\det(B^T) = \det(B)$. □

Det siste resultatet er nyttig når vi skal regne ut visse determinanter:

Eksempel 3: Tenk deg at vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ifølge korollaret ovenfor kan vi like godt regne ut determinanten til $\det(A^T)$, og da får vi

$$\det(A) = \det(A^T) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -3 \\ -3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

der vi har utnyttet alle nullene til å forenkle regnearbeidet (resten av utregningene får du gjøre selv). □

Utvikling langs rader og søyler

Når vi bruker definisjonen til å uttrykke en $n \times n$-determinant ved hjelp av $(n-1) \times (n-1)$-determinanter, sier vi at vi *utvikler* eller *ekspanderer* determinanten langs første rad. Det viser seg at vi kan utvikle en determinant også langs andre rader — og faktisk også langs søyler (her bruker vi trikset i eksempel 3; vi transponerer matrisen for å gjøre om søyler til rader).

Når vi utvikler determinanten til en $n \times n$-matrise A langs i-te rad, tar vi det første elementet a_{i1} i raden og ganger med den $(n-1) \times (n-1)$-matrisen vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{i1}. Deretter gjør vi det samme med det andre elementet i raden; vi ganger a_{i2} med den $(n-1) \times (n-1)$-determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{i2}. Vi fortsetter på denne måten bortover hele raden, og til slutt legger vi sammen alle leddene med vekslende fortegn. Her må vi være litt forsiktige — når vi utvikler langs første rad, begynner vi alltid med positivt fortegn, men det gjelder ikke generelt. Regelen er at dersom nummeret i på raden er et oddetall, begynner vi med positivt fortegn, dersom i er et partall, begynner vi med negativt fortegn. Figuren nedenfor viser hvilket fortegn de forskjellige leddene får når vi utvikler en determinant.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}$$

Du kan sjekke at fortegnet til det (i,j)-te elementet er gitt ved $(-1)^{i+j}$. Når vi har utviklet langs i-te rad, sitter vi dermed igjen med

$$\det(A) = (-1)^{i+1} a_{i1} A_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} A_{12} + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} A_{in}$$

der A_{ij} er determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{ij}.

Det er ofte lurt å utvikle en determinant langs en annen rad enn den første fordi vi da kan utnytte spesielle egenskaper ved determinanten. Spesielt er det lurt å utvikle langs en rad med mange nuller. La oss se på et eksempel:

Eksempel 4: Vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi velger å utvikle langs fjerde rad siden den inneholder to nuller. Siden dette er en "partallsrad", må vi begynne med negativt fortegn:

$$\det(A) = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vi fortsetter på samme måte med 3×3-matrisene. På grunn av nullen, lønner det seg nå å utvikle langs annen rad. For oversiktens skyld tar vi determinantene hver for seg. Vi får

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) - 3 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) = 25$$

og

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5$$

$$= (-2) \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot (-1)) - 3 \cdot (2 \cdot (-1) - 3 \cdot 1) = 5$$

Dermed har vi $\det(A) = 25 - 2 \cdot 5 = 15$. □

Hvorfor får vi riktig svar når vi utvikler en determinant etter en annen rad enn den første? Det er ikke så vanskelig å forklare. Anta at vi ønsker å utvikle determinanten til A etter i-te rad. Vi kan flytte denne raden til toppen av matrisen gjennom $i-1$ radombytter — først bytter vi raden med den $(i-1)$-te, så med rad nummer $(i-2)$ osv. Til slutt får vi en matrise B der den i-te raden i A står øverst, mens alle de andre kommer i opprinnelig rekkefølge. Siden determinanten bytter fortegn for hvert radombytte, ser vi at $\det(B) = (-1)^{i-1}\det(A)$, dvs. at $\det(B) = \det(A)$ hvis i er et oddetall, og $\det(B) = -\det(A)$ hvis i er et partall. Hvis vi nå regner ut determinanten til B ved å utvikle langs første rad (altså i henhold til definisjonen), får vi nøyaktig de samme leddene som når vi utvikler $\det(A)$ langs i-te rad, bortsett fra at fortegnene til leddene er motsatt dersom i er et partall. Dette fortegnsbyttet kompenserer for at $\det(B) = -\det(A)$ når i er et partall, og dermed ser vi at prosedyren gir riktig svar i alle tilfeller.

Vi kan også utvikle determinanter langs søyler istedenfor rader. Ønsker vi å utvikle determinanten til $n \times n$-matrisen A langs j-te søyle, starter vi med det første elementet a_{1j} i søylen, og ganger det med den $(n-1) \times (n-1)$-determinanten vi får når vi fjerner raden og søylen gjennom a_{1j}. Vi gjør tilsvarende med de andre elementene i søylen, og til slutt legger vi sammen alle leddene med vekslende fortegn. Fortegnet følger det samme sjakkbrett-mønsteret som tidligere. Det er lett å se hvorfor denne prosedyren gir riktig svar — å utvikle determinanten til A etter j-te søyle, er det samme som å utvikle determinanten til A^T etter j-te rad, og vi vet at $\det(A^T) = \det(A)$. La oss se på et enkelt eksempel.

Eksempel 5: Vi skal regne ut determinanten til

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det lønner seg å utvikle langs siste søyle siden den inneholder to nuller:

$$\det(A) = 0 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= -3 \cdot (2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) = 3$$

□

Vi har nå den kunnskapen vi trenger om determinanter. I neste seksjon skal vi se hvordan vi kan bruke denne kunnskapen til å finne egenverdier og egenvektorer.

4.9 Egenvektorer og egenverdier

Dersom A er en $n \times n$-matrise, kalles en vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ en *egenvektor* for A dersom det finnes et tall λ slik at $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Tallet λ kalles en *egenverdi* for A. Vi har vært borti egenvektorer og egenverdier tidligere, men siden vi ikke har hatt noen metode for å finne dem, har det vært vanskelig å utnytte dem skikkelig. Med det vi nå har lært om determinanter, har vi de redskapene vi trenger.

Det er et par ting vi bør avklare før vi begynner. For det første legger vi merke til at dersom $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, så er også enhver parallell vektor $a\mathbf{v}$ (der a er et tall forskjellig fra 0) en egenvektor med egenverdi λ siden

$$A(a\mathbf{v}) = aA(\mathbf{v}) = a(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(a\mathbf{v})$$

Når vi er på jakt etter egenvektorer, er det nok å finne én av disse parallelle vektorene, og vi velger da som regel en som har "pene" (f.eks. heltallige) komponenter.

Den andre tingen vi bør være klar over, er at selv om en matrise A er reell, kan det hende at den har egenverdier og egenvektorer som er komplekse (se eksempel 5 i seksjon 2.8). Skal man løse et praktisk problem, er det ofte helt nødvendig å studere disse komplekse egenvektorene og egenverdiene, og det medfører at vi er nødt til å bruke teorien fra de tidligere seksjonene på komplekse tall og komplekse vektorer. I noen tilfeller går vi da utover det vi strengt tatt har bevist, men det er ikke vanskelig å sjekke at de tidligere resultatene i dette kapitlet også holder for komplekse tall og komplekse vektorer. Det eneste vi må passe litt ekstra på når vi regner med komplekse vektorer, er skalarproduktet. Som du kanskje husker fra seksjon 1.3, inneholder skalarproduktet av to komplekse vektorer $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ en komplekskonjugasjon — vi har

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \cdots + x_n\overline{y_n}$$

Når vi skal finne egenvektorer og egenverdier, lønner det seg som regel å finne egenverdiene først. Ifølge definisjonen er λ en egenverdi for A dersom det finnes en ikke-null vektor $\mathbf{v}$ slik at

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

Sagt på en annen måte: λ er en egenverdi for A dersom ligningen $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ har en ikke-null løsning $\mathbf{v}$. Skriver vi høyresiden av denne ligningen som $\lambda I_n\mathbf{v}$ og flytter leddet $A\mathbf{v}$ over på den andre siden, får vi

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4.9.1}$$

Dette betyr at λ er en egenverdi for A hvis og bare hvis ligning (4.9.1) har en løsning $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, dvs. hvis og bare hvis ligningen har mer enn én løsning ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$ er alltid en løsning). Ifølge teorem 4.8.10 skjer dette hvis og bare hvis $\det(\lambda I_n - A) = 0$. Vi her dermed vist:

Lemma 4.9.1 *λ er en egenverdi for $n \times n$-matrisen A hvis og bare hvis* $\det(\lambda I_n - A) = 0$. □

Observer at dersom

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

så er

$$\lambda I_n - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

La oss se på et eksempel.

Eksempel 1: Vi skal finne egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Vi ser at

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 1 \\ -5 & \lambda + 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda - 4)(\lambda + 2) - (-5) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 8 + 5 = \lambda^2 - 2\lambda - 3$$

Egenverdiene er altså løsningene til annengradsligningen

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

Løser vi denne, får vi egenverdiene $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Når vi har funnet egenverdiene, er det ingen sak å finne egenvektorene. En egenvektor $\mathbf{v}_1$ med egenverdi $\lambda_1 = 3$, er en løsning av ligningen

$$A\mathbf{v}_1 = 3\mathbf{v}_1$$

Setter vi inn $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, får vi

$$\begin{aligned} 4x - y &= 3x \\ 5x - 2y &= 3y \end{aligned}$$

som kan omformes til

$$\begin{aligned} x - y &= 0 \\ 5x - 5y &= 0 \end{aligned}$$

Vi kan selvfølgelig løse dette systemet ved Gauss-eliminasjon, men det er egentlig unødvendig — vi ser at ligningene har de samme løsningene, og at vi derfor kan nøye oss med å løse den første. Den har åpenbart løsningene $x = y$. Dette beyr at vi kan velge y fritt og så regne ut x. Alle vektorer vi får på denne måten er parallelle, og vi plukker derfor bare ut én av dem. Velger vi $y = 1$, får vi $x = 1$, og vi ser dermed at $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en egenvektor.

La oss også finne en egenvektor $\mathbf{v}_2$ for den andre egenverdien $\lambda_2 = -1$. Denne vektoren må være en løsning av ligningen

$$A\mathbf{v}_1 = (-1)\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1$$

Setter vi inn $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, får vi

$$\begin{aligned} 4x - y &= -x \\ 5x - 2y &= -y \end{aligned}$$

som kan omformes til

$$\begin{aligned} 5x - y &= 0 \\ 5x - y &= 0 \end{aligned}$$

Igjen ser vi at vi kan regne ut x når vi har valgt y. Velger vi $y = 5$, får vi $x = 1$, og dermed har vi $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vi har altså to egenvektorer

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Det er lett å se at disse er lineært uavhengige og dermed danner en basis for $\mathbb{R}^2$. ♣

I eksemplet ovenfor måtte vi løse en annengradsligning for å finne egenverdiene til en 2×2-matrise. Dette er typisk — skal vi finne egenverdiene til en $n \times n$-matrise, må vi løse en n'te-gradsligning. Grunnen er at når vi regner ut $\det(\lambda I_n - A)$, får vi et n'te-gradspolynom i λ. For å overbevise deg om dette behøver du bare å tenke på hva som skjer når du utvikler en matrise etter første rad (hvis du vil, kan du føre et induksjonsbevis).

Definisjon 4.9.2 *Dersom A er $n \times n$-matrise, kalles n'te-gradspolynomet*

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

det karakteristiske polynomet *til A.*

Fra algebraens fundamentalteorem (se *Kalkulus*, teorem 3.5.1) vet vi at et n'te-gradspolynom alltid har n røtter når vi teller med multiplisitet og tillater komplekse løsninger. Det vanligste er at alle røttene er forskjellige. Det neste resultatet viser at hvis det karakteristiske polynomet P_A har n forskjellige røtter, så har vi en basis av egenvektorer for A.

Setning 4.9.3 *La A være en $n \times n$-matrise, og anta at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er egenvektorer med forskjellige egenverdier. Da er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ lineært uavhengige. Dersom A har n forskjellige egenverdier, finnes det altså en basis som består av egenverdier for A.*

Bevis: Anta (for motsigelse) at det finnes lineært avhengige egenvektorer med forskjellige egenverdier, og la $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ være en slik mengde med færrest mulige elementer. Vi ser at k er minst 2 siden en mengde som bare består av ett, ikke-null element umulig kan være lineært avhengig. Siden vektorene er lineært avhengige, finnes det tall c_1, c_2, ..., c_k som ikke alle er null, slik at

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{4.9.2}$$

Faktisk må *alle* c'ene være forskjellige fra null, for hvis ikke finnes det en mindre, lineært avhengig mengde av egenvektorer. Hvis vi ganger ligningen (4.9.2) fra venstre med A, får vi

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_k\lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \tag{4.9.3}$$

der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ er egenverdiene. Ganger vi ligning (4.9.2) med $-\lambda_1$ og legger resultatet til (4.9.3), får vi

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + c_3(\lambda_3 - \lambda_1)\mathbf{v}_3 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_1)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Siden alle c'ene er forskjellige fra null og egenverdiene er forskjellige, viser dette at $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ..., $\mathbf{v}_k$ er lineært avhengige, men det er umulig siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ er en *minimal*, lineært avhengig mengde. Dette betyr at antagelsen om at det finnes lineært avhengige egenvektorer med forskjellige egenverdier, er gal, og dermed er den første delen setning bevist. Den andre delen følger siden enhver lineært uavhengig mengde med n elementer i $\mathbb{R}^n$ er en basis (se setning 4.6.10). □

Multiple egenverdier

Vi har nå sett at dersom alle egenverdiene til en matrise er forskjellige, så finnes det en basis av egenvektorer. Det er naturlig å tenke seg at dette også gjelder dersom noen av egenverdiene er sammenfallende — det naturlige tipset er at dersom λ er en egenverdi med multiplisitet k, så finnes det k lineært uavhengige egenvektorer med egenverdi λ. Dette er imidlertid ikke tilfellet, og dermed er det heller ikke slik at enhver matrise har en basis av egenvektorer. La oss se på et eksempel.

Eksempel 2: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$P_A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 2)\lambda - (-1) \cdot 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

som bare har én rot $\lambda = 1$. Denne roten har multiplisitet 2 siden

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

En egenvektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ må tilfredsstille $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} 2x - y &= x \\ x &= y \end{aligned}$$

Dette ligningssystemet er oppfylt hvis $x = y$, dvs. hvis $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$. Alle disse vektorene er lineært avhengige, så selv om λ har multiplisitet 2, finnes det ikke to lineært uavhengige vektorer med egenverdi 1. Det finnes heller ikke noen basis bestående av egenvektorer til A. ♣

Vi skal se på et eksempel til. Dette eksemplet viser at vi ikke må bli *for* pessimistiske; vi kan godt ha en basis av egenvektorer selv om ikke alle egenverdiene er forskjellige. Eksemplet demonstrerer også noen av de regnetekniske utfordringene vi får, når vi skal finne egenverdiene til litt større systemer.

Eksempel 3: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er gitt ved:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \lambda - \frac{4}{3} \end{vmatrix}$$

For å regne ut polynomet, ekspanderer vi langs andre rad og får

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - \frac{5}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \lambda - \frac{4}{3} \end{vmatrix} = (\lambda - 1) \left(\left(\lambda - \frac{5}{3}\right)\left(\lambda - \frac{4}{3}\right) - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \right) =$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right)$$

Annengradspolynomet $\lambda^2 - 3\lambda + 2$ har røttene 2 og 1 (sjekk!), og dermed har P_A røttene 2 og 1 — den siste med multiplisitet 2. Egenverdiene til A er dermed også 2 og 1.

La oss først finne egenvektorene med egenverdi 1. En slik egenvektor

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

må tilfredsstille ligningen $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$, dvs.

$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= x \\ y &= y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}z &= z \end{aligned}$$

Dette systemet kan også skrives

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ 0 &= 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z &= 0 \end{aligned}$$

Det er mange måter å løse dette systemet på, men siden det er viktig ikke å miste noen løsninger, kobler vi inn den "offisielle" metoden vår. Den utvidede matrisen til ligningssystemet er

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Vi radreduserer denne matrisen ved å legge den første raden til den tredje, og deretter gange den første raden med $\frac{3}{2}$. Vi sitter da igjen med matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at y og z er frie variable, mens x er en basisvariabel. Velger vi verdier for y og z, får vi

$$x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$$

En egenvektor må derfor være på formen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dette viser at
$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
genererer alle egenvektorer med egenverdi 1, og det er lett å sjekke at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige.

Vi ser nå på den andre egenverdien 2. En egenvektor
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
med denne egenverdien må tilfredsstille ligningen $A\mathbf{v} = 2\mathbf{v}$, dvs.
$$\begin{aligned} \frac{5}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 2x \\ y &= 2y \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{4}{3}z &= 2z \end{aligned}$$
Dette systemet kan også skrives
$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z &= 0 \\ -y &= 0 \\ -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z &= 0 \end{aligned}$$
Den utvidede matrisen til dette ligningssystemet er
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$
Vi radreduserer denne matrisen:
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \overset{III+(-2)I}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\overset{III+(-1)II}{\sim} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{(-3)I \\ (-1)II}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel, mens x og y er basisvariable. Velger vi en verdi for z, får vi

$$y = 0$$

og

$$x = y - z = -z$$

En egenvektor må derfor være på formen

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alle disse vektorene er parallelle, og vi velger

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

som vår representant. Vi har dermed tre egenverdier

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Det er lett å sjekke at disse er lineært uavhengige og dermed danner en basis for $\mathbb{R}^3$. ♣

Eksemplene ovenfor viser at det ikke er så lett å vite hva som skjer med egenvektorene når vi har sammenfallende egenverdier — i noen tilfeller vil vi ha en basis av egenvektorer, i andre tilfeller ikke. Vi kan ikke gjøre så mye annet enn å undersøke hvert enkelt tilfelle. Det finnes mer avanserte verktøy man kan bruke, men de får vente til en annen anledning.

Komplekse egenverdier

Vi tar også med et eksempel der egenverdiene er komplekse. Fremgangsmåten er akkurat den samme som i det reelle tilfellet, men regningene kan bli litt styggere siden vi nå får ligningssystemer med komplekse koeffisienter.

Eksempel 4: Vi skal finne egenverdiene og egenvektorene til matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Det karakteristiske polynomet er

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

Setter vi dette uttrykket lik null og løser annengradsligningen, får vi

$$\lambda = \frac{-(2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2} = 1 \pm 2i$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = 1 + 2i$ og $\lambda_2 = 1 - 2i$.

Vi finner først en egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi λ_1. En slik vektor må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 + 2i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

det vil si

$$\begin{aligned} x - 2y &= (1 + 2i)x \\ 2x + y &= (1 + 2i)y \end{aligned}$$

Flytter vi leddene på høyre side over på den andre siden, og forkorter med 2, får vi

$$\begin{aligned} -ix - y &= 0 \\ x - iy &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den øverste ligningen med i, får vi den nederste ligningen, og det er derfor nok å finne en løsning til den ene av ligningene. Velger vi y lik 1 i den nederste ligningen, får vi $x = i$, og dermed har vi funnet egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi λ_2 på akkurat samme måte. En slik vektor må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1 - 2i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

det vil si

$$\begin{aligned} x - 2y &= (1 - 2i)x \\ 2x + y &= (1 - 2i)y \end{aligned}$$

Flytter vi leddene på høyre side over på den andre siden, og forkorter med 2, får vi

$$\begin{aligned} ix - y &= 0 \\ x + iy &= 0 \end{aligned}$$

Ganger vi den første ligningen med $-i$, får vi den andre, så det er nok å løse én av ligningene. Velger vi $y = 1$ i den nederste, får vi $x = -i$. Dermed har vi egenvektoren

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

♣

I eksemplet ovenfor ser vi at de to egenverdiene og de to egenvektorene er kompleksskonjugerte av hverandre. At egenverdiene er kompleksskonjugerte, er ikke noe mysterium — det følger av at de komplekse røttene til et reelt polynom alltid kommer i kompleksskonjugerte par (se *Kalkulus*, lemma 3.5.3). For å sjekke at det samme gjelder egenvektorene, trenger vi et lite resonnement.

Setning 4.9.4 *Anta at A er en reell $n \times n$-matrise, og at $\mathbf{v}$ er en kompleks egenvektor med egenverdi λ. Da er $\overline{\mathbf{v}}$ en egenvektor med egenverdi $\overline{\lambda}$ (her er $\overline{\mathbf{v}}$ den vektoren vi får når vi kompleksskonjugerer alle komponentene til $\mathbf{v}$).*

Bevis: (I dette beviset bruker vi regnereglene for konjugasjon på vektorer og matriser, og ikke bare på tall. Du bør sjekke at dette er tillatt.) Siden A er reell, har vi

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{A}\,\overline{\mathbf{v}} = A\overline{\mathbf{v}}$$

På den annen side er

$$\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$$

Kombinerer vi disse to uttrykkene får vi

$$A\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\,\overline{\mathbf{v}}$$

som viser at $\overline{\mathbf{v}}$ er en egenvektor med egenverdi $\overline{\lambda}$. □

Legg merke til at vi kan bruke denne setningen til å forenkle arbeidet med å finne komplekse egenvektorer. I eksempel 4 kunne vi ha brukt den til å skrive opp $\mathbf{v}_2$ med en gang vi hadde funnet $\mathbf{v}_1$.

Egenverdier til symmetriske matriser

Vi må inrømme at teorien vår har sine ubehagelige sider — det er ikke alle matriser som har en basis av egenvektorer, og det kan godt tenkes at egenverdiene er komplekse selv om matrisen er reell. Dette må vi bare leve med — det er nå slik verden engang er. Det finnes imidlertid noen matriser som oppfører seg slik vi kunne ønske oss, nemlig de symmetriske.

Definisjon 4.9.5 *En $n \times n$-matrise A er* symmetrisk *dersom $A = A^T$.*

Navnet *symmetrisk* kommer av at en symmetrisk matrise ikke endrer seg når vi speiler den om diagonalen. Disse matrisene er symmetriske:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 0 \\ -2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & \pi \end{pmatrix}$$

De symmetriske matrisene kan virke spesielle, men de dukker opp i forbausende mange sammenhenger. I et senere kapittel skal vi utnytte at Hessematriser (husk at dette er matriser bestående av de annenderiverte til en funksjon) er symmetriske.

Vi trenger en definisjon til før vi kan skrive opp hovedresultatet for symmetriske matriser: En basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ er *ortonormal* dersom alle vektorene i basisen har lengde 1 og står ortogonalt (normalt) på hverandre — med andre ord dersom

$$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

Teorem 4.9.6 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) *Anta at A er en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det finnes en ortonormal basis av (reelle) egenvektorer til A.*

Vi utsetter beviset for dette teoremet til seksjon 4.11 — det er ikke spesielt vanskelig, men det krever en del forberedelser som vi ikke har gjort ennå.

Ortonormale basiser har mange fordeler — blant annet er det raskt å finne ut hvordan man kan skrive en vilkårlig vektor som en lineærkombinasjon av basisvektorene:

Setning 4.9.7 *Anta at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,…,$\mathbf{v}_n$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. For ethvert element $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ er da*

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

der $c_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$.

Bevis: Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$,…,$\mathbf{v}_n$ er en basis, vet vi at $\mathbf{v}$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_i\mathbf{v}_i + \cdots + c_n\mathbf{v}_n$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{v}_i$ på begge sider, får vi

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_i = c_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_i + c_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_i + \cdots + c_i\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \cdots + c_n\mathbf{v}_n \cdot \mathbf{v}_i = c_i$$

der vi har brukt at

$$\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_i = \begin{cases} 0 & \text{hvis } i \neq j \\ 1 & \text{hvis } i = j \end{cases}$$

□

Egenverdier med MATLAB

Det er lett å finne egenverdier og egenvektorer med MATLAB. Det er flere kommandoer du kan bruke, men den nyttigste er som regel

```
>> [u,v]=eig(A)
```

Denne kommandoen definerer to matriser u og v. Søylene i matrisen u er egenvektorene til A, mens v er en diagonalmatrise der elementene på diagonalen er egenverdiene til A. Egenvektorene og egenverdiene kommer i samme rekkefølge slik at den første egenverdien tilhører den første egenvektoren osv. Her er et eksempel på en kjøring:

```
>> B=[2 1 3
4 0 3
1 1 -2];

>> [u,v]=eig(B)

u =

   -0.2864   -0.0000    0.3833
   -0.9143    0.9487   -0.8404
   -0.2864    0.3162    0.3833


v =

    2.1926         0         0
         0    1.0000         0
         0         0   -3.1926
```

Vær oppmerksom på at MATLAB alltid velger egenvektorer med lengde 1. Dette er praktisk for noen formål, men fører ofte til at egenvektorene blir mer uoversiktlige enn nødvendig. De fleste av oss ville f.eks. ha oppgitt den andre egenvektoren ovenfor som $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, men MATLAB velger altså en normalisert variant. Mer ubegrepelig er MATLABs forkjærlighet for å velge negative komponenter i egenvektorene; for de fleste formål ville det være mer naturlig å velge den første egenvektoren til å være

$$\begin{pmatrix} 0.2864 \\ 0.9143 \\ 0.2864 \end{pmatrix} \text{ istedenfor } \begin{pmatrix} -0.2864 \\ -0.9143 \\ -0.2864 \end{pmatrix}$$

Når man regner videre med egenvektorer man har fått av MATLAB, kan det derfor være lurt å se om man kan forenkle dem ved å velge en annen skalering eller et annet fortegn.

Det er en ting til man bør være klar over. MATLAB vil av og til operere med en liten imaginærdel i en egenverdi/egenvektor som egentlig er reell. Det skyldes at MATLAB er et numerisk beregningsverktøy som regner med avrundede tall. Får du egenverdier/egenvektorer med en ørliten imaginærdel (eller en ørliten realdel), kan det være lurt å sjekke om dette er en avrundingsfeil før du går videre.

4.10 Egenvektorer i praksis

I denne seksjonen skal vi se på tre eksempler som illustrerer hvordan egenvektorer og egenverdier kan brukes i praksis. Disse eksemplene er lange og ganske kompliserte, men de viser på en realistisk måte hva vi må gjøre for å analysere problemer fra den virkelige verden. Det siste eksemplet viser også hvor nyttig det er å ha et verktøy som MATLAB når matrisene blir store og uttrykkene stygge.

Før vi begynner, minner vi om følgende viktige observasjon fra kapittel 2:

Setning 4.10.1 *Anta at* $\mathbf{v}$ *er en egenvektor for* A *med egenverdi* λ*. Da er* $\mathbf{v}$ *en egenvektor for* A^n *med egenverdi* λ^n*, dvs.*

$$A^n\mathbf{v} = \lambda^n\mathbf{v}$$

Bevis: Vi har

$$A^2\mathbf{v} = A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$$

$$A^3\mathbf{v} = A(A^2\mathbf{v}) = A(\lambda^2\mathbf{v}) = \lambda^2 A\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v}$$

osv. Før gjerne et induksjonsbevis om du vil! □

Eksempel 1: Vi går tilbake til handlevogneksemplet i seksjon 1.4, men vi endrer matrisen en smule for å få pene egenvektorer. Et kjøpesenter har tre stativ X, Y og Z hvor du kan hente og avlevere handlevogner. Av de vognene som starter dagen i stativ X, vil 70% avslutte den på samme sted, 10% vil ha endt opp i Y, og 20% i Z. Av de vognene som startet dagen i stativ Y, vil 30% avslutte dagen i stativ X, mens henholdsvis 50% og 20% vil havne i stativene Y og Z. De tilsvarende tallene for vogner som starter i Z, er at 40% ender dagen i X, 20% i Y og 40% i Z. Vi ordner disse tallene i en matrise A der første søyle gir fordelingen av de vognene som startet i X, andre søyle gir fordelingen av de vognene som startet i Y og tredje søyle gir fordelingen av vognene som startet i Z:

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Vi ser at hvis vi starter dagen med x_0 handlevogner i stativ X, y_0 handlevogner i stativ Y og z_0 handlevogner i stativ Z, og lar

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

så vil vektoren

$$\mathbf{r}_1 = A\mathbf{r}_0$$

gi oss fordelingen av handlevogner på slutten av dagen. Hvis handlesenteret aldri rydder opp i handlevognene, men lar dem bli stående der kundene setter dem, vil fordelingen etter n dager være gitt ved vektoren

$$\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0$$

Vi skal se hvordan vi kan bruke egenverdiene og egenvektorene til A til å finne et uttrykk for $\mathbf{r}_n$.

Vi regner først ut egenverdiene til A. Etter en del kjedelig regning finner vi at

$$\det(\lambda I_3 - A) = \left| \begin{matrix} \lambda - 0.7 & -0.3 & -0.4 \\ -0.1 & \lambda - 0.5 & -0.2 \\ -0.2 & -0.2 & \lambda - 0.4 \end{matrix} \right] =$$

$$= \lambda^3 - 1.6\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08$$

For å finne egenverdiene, må vi altså løse tredjegradsligningen

$$\lambda^3 - 1.6\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08 = 0$$

Dette kan høres vanskelig ut, men ved innsetting ser vi at $\lambda = 1$ er en løsning. Vi kan derfor polynomdividere med $\lambda - 1$ og få

$$\lambda^3 - 1.6x\lambda^2 + 0.68\lambda - 0.08 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 0.6\lambda + 0.08)$$

Løsningene til annengradsligningen $\lambda^2 - 0.6\lambda + 0.08 = 0$ er

$$\lambda = \frac{-(-0.6) \pm \sqrt{(-0.6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0.08}}{2 \cdot 1} = \frac{0.6 \pm 0.2}{2} = \begin{cases} 0.4 \\ \\ 0.2 \end{cases}$$

Egenverdiene til A er dermed $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.4$ og $\lambda_3 = 0.2$.

Neste punkt på programmet er å finne egenvektorene. Dersom $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ er en egenvektor med egenverdi 1, må vi ha

$$\begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Dette gir ligningssystemet

$$\begin{aligned} -0.3x + 0.3y + 0.4z &= 0 \\ 0.1x - 0.5y + 0.2z &= 0 \\ 0.2x + 0.2y - 0.6z &= 0 \end{aligned}$$

Vi ganger ligningssystemet med 10 for å slippe desimaltall og skriver deretter opp den utvidede matrisen:

$$B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Radreduserer vi matrisen, får vi:

$$B \overset{I \leftrightarrow II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{pmatrix} \overset{\substack{II+3I \\ III+(-2)I}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 12 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{III+II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{12}II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi ser at z er en fri variabel. Gitt z, kan vi regne ut $y = \frac{5}{6}z$, $x = 5y - 2z = 5 \cdot \frac{5}{6}z - 2z = \frac{13}{6}z$. Velger vi derfor $z = 6$, får vi $y = 5$ og $x = 13$. Dette gir egenvektoren

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Vi kan finne egenvektorene knyttet til de andre egenverdiene på tilsvarende måte. Vi får

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Siden egenverdiene er forskjellige, vet vi at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$ danner en basis. Begynnelsestilstanden $\mathbf{r}_0$ kan derfor skrives som en lineærkombinasjon av egenvektorene

$$\mathbf{r}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 \tag{4.10.1}$$

Vi skal finne konstantene c_1, c_2, c_3 senere, men la oss foreløpig arbeide videre med uttrykket ovenfor. Ganger vi med A^n på begge sider, får vi

$$\mathbf{r}_n = A^n\mathbf{r}_0 = c_1A^n\mathbf{v}_1 + c_2A^n\mathbf{v}_2 + c_3A^n\mathbf{v}_3 =$$

$$= c_1\lambda_1^n\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^n\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^n\mathbf{v}_3 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\cdot(0.4)^n\mathbf{v}_2 + c_3\cdot(0.2)^n\mathbf{v}_3$$

Tar vi grensen når $n \to \infty$, blir de to siste leddene borte, og vi sitter igjen med

$$\mathbf{r}_n \to c_1\mathbf{v}_1 \qquad \text{når } n \to \infty$$

Dette betyr at fordelingen av handlevogner nærmer seg en likevektstilstand når n går mot uendelig, og denne fordelingen er bestemt av egenvektoren til den største egenverdien.

La oss til slutt se hvordan vi kan finne konstantene c_1, c_2, c_3. Vi må da spesifisere begynnelsestilstanden $\mathbf{r}_0$, og la oss anta at handlesenteret har 144 handlevogner som alle blir plassert i stativ X i utgangspunktet. Det betyr at

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

og at ligning (4.10.1) ovenfor kan skrives:

$$c_1\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 144 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

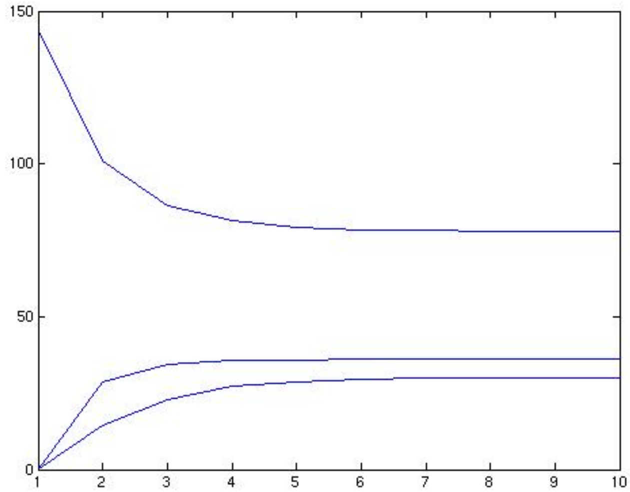
Dette er ekvivalent med ligningssystemet

$$\begin{aligned} 13c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ 5c_1 - c_2 + c_3 &= 0 \\ 6c_1 - 2c_2 &= 0 \end{aligned}$$

som har løsningene $c_1 = 6$, $c_2 = 48$, $c_3 = 18$. Setter vi dette inn i uttrykket for $\mathbf{r}_n$ ovenfor, får vi

$$\mathbf{r}_n = 6\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 48\cdot(0.4)^n\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 18\cdot(0.2)^n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Likevektstilstanden i dette tilfellet er gitt ved $6\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ 30 \\ 36 \end{pmatrix}$, dvs. 78 handlevogner i stativ X, 30 i stativ y og 36 i stativ z. Figuren nedenfor viser hvordan fordelingen nærmer seg likevektstilstanden. Den øverste kurven viser antall vogner i stativ X, den nest øverste antall vogner i stativ Y og den nederste antall vogner i stativ Z. ♣



Bemerkning: Oppførselen i eksemplet ovenfor er typisk for systemer der vi har en konstant mengde (i eksemplet: antall handlevogner) som omfordeles mellom tilstander (i eksemplet: stativene X, Y, Z). I slike systemer er 1 alltid en egenverdi, og den tilhørende egenvektoren beskriver en likevekts-tilstand for systemet.

I det neste eksemplet skal vi se et system av differensialligninger.

Eksempel 2: Dyreslagene I og II lever i det samme området. Dyreslag II er avhengig av dyreslag I som føde for å kunne overleve i området. Store mengder av dyreslag II vil derfor bremse veksten til dyreslag I, mens store mengder av dyreslag I fremmer veksten til dyreslag II. Dersom $x(t)$ og $y(t)$ er mengden av hhv. dyreslag I og dyreslag II ved tiden t, antar vi at ligningene som styrer veksten til de to dyreslagene, er

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{1}{5}x(t) - \frac{1}{20}y(t) \\ y'(t) &= \frac{1}{4}x(t) - \frac{1}{10}y(t) \end{aligned}$$

Vår oppgave er å løse ligningssystemet og finne uttrykk for $x(t)$ og $y(t)$. Siden ligningssystemet kobler de to ukjente funksjonene til hverandre, kan vi ikke bruke våre vanlige differensialligningsteknikker til å finne $x(t)$ og $y(t)$ hver for seg. Vi skal se hvordan vi kan bruke egenverdier og egenvektorer til å "dekoble" ligningssystemet slik at vi får to ligninger som kan løses hver for seg.

Vi observerer først at dersom vi innfører vektorfunksjonen

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix},$$

kan ligningssystemet skrives

$$\mathbf{r}'(t) = A\mathbf{r}(t)$$

der

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Vi finner først egenverdiene og egenvektorene til matrisen A. Det karakteristiske polynomet

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \\ -\frac{1}{4} & \lambda + \frac{1}{10} \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{10}\lambda - \frac{3}{400}$$

har røttene

$$\lambda = \frac{-(-\frac{1}{10}) \pm \sqrt{(-\frac{1}{10})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\frac{3}{400})}}{2 \cdot 1} = \frac{\frac{1}{10} \pm \frac{2}{10}}{2} = \begin{cases} \frac{3}{20} \\ -\frac{1}{20} \end{cases}$$

Egenverdiene er altså $\lambda_1 = \frac{3}{20}$ og $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$.

En egenvektor $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_1 = \frac{3}{20}$ må oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3}{20} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut, får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x - \frac{1}{20}y &= \frac{3}{20}x \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{10}y &= \frac{3}{20}y \end{aligned}$$

Flytter vi over og rydder opp litt, ser vi at begge disse ligningene er ekvivalente med

$$x - y = 0$$

Det betyr at vi kan velge y fritt, men at x da er gitt ved $x = y$. Velger vi y=1, får vi $x = 1$, og den første egenvektoren vår er dermed

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

På tilsvarende måte må en egenvektor $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med egenverdi $\lambda_2 = -\frac{1}{20}$ oppfylle ligningen

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{20} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Multipliserer vi ut, får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{1}{5}x - \frac{1}{20}y &= -\frac{1}{20}x \\ \frac{1}{4}x - \frac{1}{10}y &= -\frac{1}{20}y \end{aligned}$$

Flytter vi over og rydder opp litt, ser vi at begge disse ligningene er ekvivalente med

$$5x - y = 0$$

Det betyr at vi kan velge y fritt, men at x da er gitt ved $5x = y$. Velger vi $y = 5$, får vi $x = 1$, og den andre egenvektoren vår er dermed

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Vi går nå tilbake til differensialligningene våre. Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ er en basis for $\mathbb{R}^2$, kan enhver vektor skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Det betyr at det for hver t finnes tall $c_1(t)$ og $c_2(t)$ slik at

$$\mathbf{r}(t) = c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2$$

Deriverer vi, får vi

$$\mathbf{r}'(t) = c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2$$

Sette vi dette inn i ligningen $\mathbf{r}'(t) = A\mathbf{r}(t)$, ser vi at

$$c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 = A\big(c_1(t)\mathbf{v}_1 + c_2(t)\mathbf{v}_2\big) =$$

$$= c_1(t)A\mathbf{v}_1 + c_2(t)A\mathbf{v}_2 = c_1(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2(t)\lambda_2\mathbf{v}_2$$

Vi har altså

$$c_1'(t)\mathbf{v}_1 + c_2'(t)\mathbf{v}_2 = c_1(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2(t)\lambda_2\mathbf{v}_2$$

og siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ er lineært uavhengige, betyr dette at

$$c_1'(t) = \lambda_1 c_1(t) \qquad \text{og} \qquad c_2'(t) = \lambda_2 c_2(t)$$

Legg merke til at vi nå har "dekoblet" ligningssystemet og fått to differensialligninger som kan løses hver for seg. Gjør vi det, får vi

$$c_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} = C_1 e^{\frac{3}{20}t} \qquad \text{og} \qquad c_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 e^{-\frac{1}{20}t}$$

der C_1 og C_2 er konstanter. Dermed har vi

$$\mathbf{r}(t) = C_1 e^{\frac{3}{20}t}\mathbf{v}_1 + C_2 e^{-\frac{1}{20}t}\mathbf{v}_2$$

For å bestemme konstantene C_1 og C_2 trenger vi flere opplysninger om dyrestammene. La oss anta at det ved tiden $t = 0$ er 3 000 dyr av slag I og 11 000 av slag II. Det betyr at

$$\begin{pmatrix} 3\,000 \\ 11\,000 \end{pmatrix} = \mathbf{r}(0) = C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Løser vi dette ligningssystemet, får vi $C_1 = 1\,000$ og $C_2 = 2\,000$. Dermed har vi

$$\mathbf{r}(t) = 1\,000 e^{\frac{3}{20}t}\mathbf{v}_1 + 2\,000 e^{-\frac{1}{20}t}\mathbf{v}_2 = 1\,000 e^{\frac{3}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\,000 e^{-\frac{1}{20}t}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\,000 e^{\frac{3}{20}t} + 2\,000 e^{-\frac{1}{20}t} \\ 1\,000 e^{\frac{3}{20}t} + 10\,000 e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix}$$

Antall dyr av slag I ved tiden t er dermed $x(t) = 1\,000 e^{\frac{3}{20}t} + 2\,000 e^{-\frac{1}{20}t}$, mens antall dyr av slag II er $y(t) = 1\,000 e^{\frac{3}{20}t} + 10\,000 e^{-\frac{1}{20}t}$.

Til slutt legger vi nok en gang merke til hvordan vi i dette eksemplet brukte egenvektorer til å "dekoble" systemet — de opprinnelige funksjonene $x(t)$ og $y(t)$ er koblet sammen gjennom ligningssystemet, mens de nye funksjonene c_1 og c_2 er "frakoblet" hverandre og oppfyller hver sin ligning. Slike "dekoblinger" står sentralt i mange anvendelser av egenvektorer. ♣

La oss til slutt se på et litt mer komplisert eksempel der vi får god bruk for MATLAB til å holde styr på egenverdier og egenvektorer. Eksemplet minner en del om eksempel 1, men vi ser nå på et system som vokser, og der mye av poenget er å finne hvor stor veksten er. Eksemplet viser også hva som skjer dersom vi har komplekse egenverdier.

Eksempel 3: Et dyreslag har en levealder på fire år. Det første året er dyrene *unger*, det andre året er de *ungdommer*, det tredje året er de *voksne* og det fjerde året er de *eldre*. Av ungene overlever 50% til året etter, av ungdommene overlever 80% til året etter og av de voksne overlever 20% til året etter. En ungdom gir i gjennomsnitt opphav til 0.5 unger som blir født året etter, en voksen gir i gjennomsnitt opphav til 2 unger som blir født året etter, og et eldre dyr gir i gjennomsnitt opphav til 0.1 unge som blir født året etter. Vi antar at vi starter med 200 dyr i hver aldersklasse, og ønsker å finne ut hvordan stammen utvikler seg.

La x_n, y_n, z_n og u_n være henholdsvis antall unger, ungdommer, voksne og eldre i år n. Da er

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.5y_n + 2z_n + 0.1u_n \\ y_{n+1} &= 0.5x_n \\ z_{n+1} &= 0.8y_n \\ u_{n+1} &= 0.2z_n \end{aligned}$$

I tillegg vet vi at $x_1 = y_1 = z_1 = u_1 = 200$.

Det er flere måter å angripe dette problemet på. La oss først se hva som skjer når vi bruker MATLAB til å regne ut utviklingen de 50 første årene. Vi lager m-filen

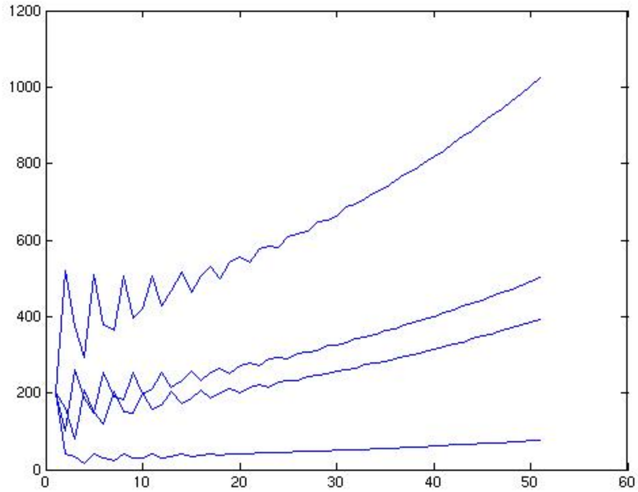
```
function [x,y,z,u]=dyrestamme(a,b,c,d,N)
x(1)=a;
y(1)=b;
z(1)=c;
u(1)=d;
for n=1:N
    x(n+1)=.5*y(n)+2*z(n)+.1*u(n);
    y(n+1)=.5*x(n);
    z(n+1)=.8*y(n);
    u(n+1)=.2*z(n);
end
```

Den neste kommandosekvensen får MATLAB til å plotte ut følgene i samme figur:

```
>> [x,y,z,u]=dyrestamme(200,200,200,200,49);
>> plot(x)
>> hold on
>> plot(y)
>> plot(z)
>> plot(u)
```

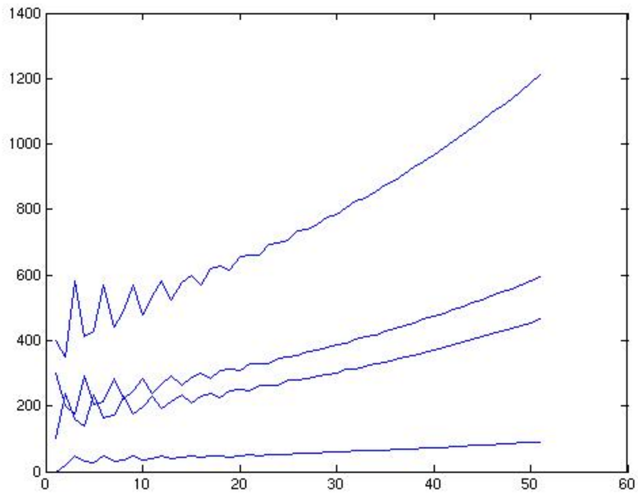
Resultatet er figuren nedenfor der den øveste kurven gir antall unger, den nest øverste antall ungdommer, den tredje øverste antall voksne og den nederste antall eldre.

Disse kurvene er ikke så lette å tolke. Det ser ut som de etter noen innledende svingninger går over i jevn vekst, og at fordelingen mellom de forskjellige aldersgruppene nærmer seg en likevekt. Men hvor kommer svingningene fra, hvor rask er veksten, og hvordan finner vi likevektsfordelingen mellom aldersgruppene?



.

La oss kjøre programmet en gang til med startverdier $x_1 = 400$, $y_1 = 300$, $z_1 = 100$, $u_1 = 0$. Resultatet ser du på figuren nedenfor, og i hovedtrekk ligner det forbløffende på det vi fikk i stad; etter noen innledende svingninger, går kurvene over i jevn vekst, og forholdet mellom aldersgruppene ligner på det vi fikk ovenfor.



Vi skal nå se hvordan vi kan bruke egenverdier og egenvektorer til å forklare disse resultatene. Det første vi observerer, er at dersom vi innfører vektorene

$$\mathbf{r}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix}$$

så kan ligningssystemet ovenfor skrives

$$\mathbf{r}_{n+1} = A\mathbf{r}_n$$

der A er matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & .5 & 2 & .1 \\ .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .2 & 0 \end{pmatrix}$$

Bruker vi denne formelen gjentatte ganger, får vi

$$\mathbf{r}_n = A^{n-1}\mathbf{r}_1$$

Legg merke til at siden vi kaller begynnelsesbestanden $\mathbf{r}_1$ og ikke $\mathbf{r}_0$, må A oppphøyes i $n-1$ og ikke n. Matematisk sett hadde det vært greiere å begynne med $\mathbf{r}_0$ slik vi gjorde i forrige eksempel, men MATLAB begynner alltid nummereringer på 1, og vi har derfor valgt å holde oss til det siden vi MATLAB bruker såpass mye i dette eksemplet.

La oss benytte MATLAB til å finne egenverdiene og egenvektorene til A:

```
>> A=[0 .5 2 .1
.5 0 0 0
0 .8 0 0
0 0 .2 0];

>> [u,v]=eig(A)

u =

  Columns 1 through 3

  -0.8472             0.7917              0.7917
  -0.4151            -0.2560 - 0.3675i  -0.2560 + 0.3675i
  -0.3254            -0.1405 + 0.3802i  -0.1405 - 0.3802i
  -0.0638             0.0887 - 0.0231i   0.0887 + 0.0231i

  Column 4

  -0.0000
   0.0006
  -0.0501
   0.9987

v =
```

```
  Columns 1 through 3

   1.0206                  0                   0
        0        -0.5053 + 0.7253i             0
        0                  0          -0.5053 - 0.7253i
        0                  0                   0

  Column 4

        0
        0
        0
  -0.0100
```

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = 1.0206$, $\lambda_2 = -0.5053 + 0.7253i$, $\lambda_3 = -0.5053 - 0.7253i$, $\lambda_4 = -0.01$ med tilhørende egenvektorer (vi bytter fortegn på den første av dem for å slippe minuser):

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 - 0.3675i \\ -0.1405 + 0.3802i \\ 0.0887 - 0.0231i \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 + 0.3675i \\ -0.1405 - 0.3802i \\ 0.0887 + 0.0231i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0006 \\ -0.0501 \\ 0.9987 \end{pmatrix}$$

Vi ser at de komplekse egenverdiene og egenvektorene er konjugerte av hverandre slik setning 4.9.4 sier. Vi ser også at egenverdiene er ordnet i avtagende rekkefølge: $|\lambda_1| > |\lambda_2| = |\lambda_3| > |\lambda_4|$.

Siden egenverdiene er forskjellige, vet vi at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, $\mathbf{v}_4$ danner en basis. Vi kan derfor skrive starttilstanden

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

som en lineærkombinasjon

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4$$

Vi skal bruke MATLAB til å finne koeffisientene c_1, c_2, c_3, c_4, men la oss først se hva som skjer når vi bruker A^{n-1} på ligningen ovenfor. Vi får

$$\mathbf{r}_n = A^{n-1}\mathbf{r}_1 = c_1 A^{n-1}\mathbf{v}_1 + c_2 A^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3 A^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4 A^{n-1}\mathbf{v}_4 =$$

$$c_1\lambda_1^{n-1}\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\lambda_4^{n-1}\mathbf{v}_4$$

Vi setter den største egenverdien λ_1^{n-1} utenfor en parentes

$$\mathbf{r}_n = \lambda_1^{n-1}\left(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\right)$$

Siden λ_1 har størst tallverdi av egenverdiene, vil alle faktorene $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}$, $\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}$ gå mot null når n går mot uendelig. Det betyr at

$$\lim_{n\to\infty}\left(c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\right) = 0$$

Definerer vi

$$\sigma(n) = c_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_2 + c_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_3 + c_4\left(\frac{\lambda_4}{\lambda_1}\right)^{n-1}\mathbf{v}_4\ ,$$

kan vi derfor skrive

$$\mathbf{r}_n = \lambda_1^{n-1}\big(c_1\mathbf{v}_1 + \sigma(n)\big)$$

der $\sigma(n) \to 0$ når $n \to \infty$. Skriver vi ut komponentene og setter in $\lambda_1 = 1.0206$, får vi

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ u_n \end{pmatrix} = 1.0206^{n-1}\left(c_1\begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix} + \sigma(n)\right)$$

Dette betyr at når n blir stor, er veksten bestemt av den største egenverdien $\lambda_1 = 1.0206$, og fordelingen mellom komponentene er bestemt av den tilhørende egenvektoren $\mathbf{v}_1$. Som du ser, minner disse resultatene om det vi fikk i Eksempel 1, men vi har fått med en vekstfaktor i tillegg.

La oss nå finne konstantene c_1, c_2, c_3 og c_4. Dersom vi velger den opprinnelige begynnelsestilstanden

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix}$$

får vi ligningen

$$\begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 0.8472 \\ 0.4151 \\ 0.3254 \\ 0.0638 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 - 0.3675i \\ -0.1405 + 0.3802i \\ 0.0887 - 0.0231i \end{pmatrix} +$$

$$+c_3 \begin{pmatrix} 0.7917 \\ -0.2560 + 0.3675i \\ -0.1405 - 0.3802i \\ 0.0887 + 0.0231i \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0006 \\ -0.0501 \\ 0.9987 \end{pmatrix}$$

Innfører vi matrisen

$$D = \begin{pmatrix} 0.8472 & 0.7917 & 0.7917 & 0 \\ 0.4151 & -0.2560 - 0.3675i & -0.2560 + 0.3675i & 0.0006 \\ 0.3254 & -0.1405 + 0.3802i & -0.1405 - 0.3802i & -0.0501 \\ 0.0638 & 0.0887 - 0.0231i & 0.0887 + 0.0231i & 0.9987 \end{pmatrix}$$

kan vi bruke MATLAB til å finne vektoren

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

ved å taste

```
>> c=D\r1
```

Vi får $c_1 = 436.59$, $c_2 = -107.29 - 49.34i$, $c_3 = -107.29 + 49.34i$, $c_4 = 193.72$. Legg merke til at koeffisientene c_2 og c_3 til de komplekse egenverdiene er konjugerte.

Vi har ennå ikke forklart hvor svingningene i figuren kommer fra. Det viser seg at de kommer fra de komplekse egenverdiene. Skriver vi den komplekse egenverdien λ_2 på polarform $\lambda_2 = re^{i\theta}$, ser vi at

$$\lambda_2^{n-1} = r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = r^{n-1} \Big(\cos((n-1)\theta) + i \sin((n-1)\theta) \Big)$$

Cosinus- og sinus-leddene får uttrykket til å svinge, men i dette tilfellet vil svingningene dø ut etter hvert fordi $r < 1$ og $r^{n-1} \to 0$ når $n \to \infty$. ♣

4.11 Spektralteoremet

I denne seksjonen skal vi bevise spektralteoremet for symmetriske matriser. Dette er et av de viktigste resultatene i lineær algebra og det er også modell for mer generelle resultater i andre deler av matematikken. Beviset er i seg selv ikke vanskeligere enn andre vi allerede har vært borti, men det er ganske langt fordi vi ennå ikke har gjort alle forberedelsene vi trenger. La oss først minne om hva teoremet sier.

Teorem 4.11.1 (Spektralteoremet for symmetriske matriser) *Anta at A er en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da er alle egenverdiene til A reelle, og det finnes en ortonormal basis av (reelle) egenvektorer til A.*

Vi skal først vise at alle egenverdiene og egenvektorene til en symmetrisk matrise er reelle. Nøkkelen er dette enkle, men viktige resultatet:

Setning 4.11.2 *Anta at A er en reell $n \times n$-matrise og at $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ er to komplekse søylevektorer. Da er*

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y})$$

Bevis: For alle søylevektorer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ er

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T\overline{\mathbf{v}}$$

der produktet på venstresiden er et skalarprodukt mens produktet på høyresiden er et matriseprodukt (ser du ikke dette med det samme, så skriv ut begge sidene av formelen og husk at komplekse skalarprodukter inneholder en komplekskonjugering i annen faktor). Bruker vi denne formelen samt regnereglene for transponering og matriseprodukter, får vi

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = (A\mathbf{x})^T\overline{\mathbf{y}} = (\mathbf{x}^T\mathbf{A}^T)\overline{\mathbf{y}} = \mathbf{x}^T(A^T\overline{\mathbf{y}})$$

Siden A er reell, er $A^T = \overline{A^T}$, og dermed får vi videre

$$\mathbf{x}^T(A^T\overline{\mathbf{y}}) = \mathbf{x}^T(\overline{A^T\mathbf{y}}) = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y})$$

$\square$

Bemerkning: Argumentet ovenfor kan være litt vanskelig å lese fordi notasjonene for matriseprodukt og skalarprodukt er så like. I mer avanserte bøker er det derfor vanlig å bruke andre måter å angi skalarprodukt på, f.eks. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ istedenfor $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$. Med denne notasjonen kan resultatet ovenfor skrives $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, A^T\mathbf{y} \rangle$ og nå blir det kanskje enklere å se hva setningen sier — vi kan føre matrisen A over på den andre siden av skalarproduktet forutsatt at vi transponerer den.

Vi tar med et viktig korollar av setningen ovenfor:

Korollar 4.11.3 *En reell $n \times n$-matrise er symmetrisk hvis og bare hvis*

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^n$

Bevis: Dersom A er symmetrisk, er

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot (A^T\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$$

ifølge setningen ovenfor.

Dersom A *ikke* er symmetrisk, finnes det minst ett par av indekser (i, j) slik at den (i, j)-te komponenten a_{ij} til A er forskjellig fra den (i, j)-te komponenten a_{ji} til A^T. Velger vi $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ og $\mathbf{y} = \mathbf{e}_j$, får vi

$$(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = a_{ji} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y}) = a_{ij}$$

Altså er $(A\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \cdot (A\mathbf{y})$. □

Vi kan nå vise det første resultatet vi er på jakt etter.

Setning 4.11.4 *Dersom A er en symmetrisk (reell) $n \times n$-matrise, så er alle egenverdiene til A reelle. De tilhørende egenverdiene kan også velges reelle.*

Bevis: Anta at λ er en (muligens kompleks) egenverdi for A med en (muligens kompleks) egenvektor $\mathbf{v}$. Da er

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = (\lambda\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \lambda|\mathbf{v}|^2$$

På den annen side er (husk at vi må bruke komplekse skalarprodukter siden λ og $\mathbf{v}$ kan være komplekse)

$$A\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (A\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\lambda\mathbf{v}) = \overline{\lambda}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \overline{\lambda}|\mathbf{v}|^2$$

(se punkt f) i setning 1.3.1 dersom du ikke skjønner hvor komplekskonjugeringen kommer fra). Dermed har vi $\lambda|\mathbf{v}|^2 = \overline{\lambda}|\mathbf{v}|^2$, og forkorter vi med $|\mathbf{v}|^2$, får vi $\lambda = \overline{\lambda}$ som viser at λ er reell. Det gjenstår å vise at det finnes en *reell* egenvektor med egenverdi λ. Dette kan gjøres på flere måter — det enkleste er kanskje å observere at siden $\det(\lambda I_n - A) = 0$, så har ligningen $(\lambda I_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ifølge teorien vår en ikke-null, reell løsning. □

Den neste setningen er det første spede skrittet på veien mot eksistensdelen av spektralteoremet — den viser at en symmetrisk matrise i hvert fall har én (reell) egenvektor.

Setning 4.11.5 *Enhver symmetrisk matrise A har minst én (reell) egenvektor.*

Bevis: Ifølge algebraens fundamentalteorem har det karakteristiske polynomet $P_A(\lambda)$ minst én rot. Det betyr at A har minst én egenverdi, og ifølge setningen ovenfor er både denne egenverdien og den tilhørende egenvektoren reelle. $\Box$

Denne setningen er brekkstangen vi trenger for å komme igang med et induksjonsbevis for spektralteoremet. Beviset går ved induksjon på dimensjonen til rommet som matrisen virker på, men dessverre kan vi ikke gjøre induksjonen fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^{n+1}$, men må gå veien om litt mer abstrakte rom. Det er disse vi nå skal se på.

Underrom

Hvis $m < n$, er det i mange sammenhenger naturlig å tenke på $\mathbb{R}^m$ som et "underrom" av $\mathbb{R}^n$ — vektorene i $\mathbb{R}^m$ svarer til de vektorene i $\mathbb{R}^n$ som bare har nuller i de siste $n - m$ komponentene. I dette avsnittet skal vi se på mer generelle underrom. Disse underrommene spiller en hovedrolle i beviset for spektralteoremet, men de er også viktige i mange andre sammenhenger

Den grunnleggende definisjonen kan virke ganske abstrakt, men som vi snart skal se, er ikke disse objektene så merkelige som de kan se ut til ved første øyekast.

Definisjon 4.11.6 *En ikke-tom mengde H av vektorer i $\mathbb{R}^n$ kalles et* underrom *av $\mathbb{R}^n$ dersom følgende betingelser er oppfylt.*

a) Dersom $\mathbf{u} \in H$, så er $c\mathbf{u} \in H$ for alle tall $c \in \mathbb{R}$.

b) Dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$.

Bemerkning: Vi sier at H er *lukket under addisjon* (betingelse b)) *og multiplikasjon med skalar* (betingelse a)).

Det minste underrommet til $\mathbb{R}^n$ er $H = \{\mathbf{0}\}$ (mengden som bare består av nullvektoren $\mathbf{0}$) og det største er $H = \mathbb{R}^n$. De viktigste eksemplene er de som ligger mellom disse ytterpunktene. Her er en klasse underrom vi kjenner fra før:

Eksempel 1: Husk (fra seksjon 4.6) at dersom $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_m$ er vektorer i $\mathbb{R}^n$, så består *spennet* $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ av alle lineærkombinasjoner

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

Vi skal vise at $H = Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$.

For å sjekke at betingelse a) er oppfylt, må vi vise at dersom $\mathbf{u} \in H$ og $c \in \mathbb{R}$, så er $c\mathbf{u} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

Dermed er

$$c\mathbf{u} = cc_1\mathbf{a}_1 + cc_2\mathbf{a}_2 + \cdots + cc_m\mathbf{a}_m$$

som er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_m$, og følgelig er $c\mathbf{u} \in H$.

For å sjekke at betingelse b) er oppfylt, må vi vise at dersom $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, så er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

og siden $\mathbf{v} \in H$, er $\mathbf{v}$ en lineærkombinasjon

$$\mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m$$

Dermed er

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_m + d_m)\mathbf{a}_m$$

en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_m$, og følgelig er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. ♣

Vi skal snart se at *alle* underrom av H (unntatt det trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$) er på formen $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ for et passende valg av $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_2$,..., $\mathbf{a}_m$. I utgangspunktet kan de imidlertid se ganske annerledes ut:

Eksempel 2: La $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Vi skal vise at

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

er et underrom av $\mathbb{R}^n$. H består altså av alle vektorene som står ortogonalt (normalt) på $\mathbf{a}$. Dersom $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, kalles H *det ortogonale komplementet til* $\mathbf{a}$ (dersom $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, er $H = \mathbb{R}^n$).

For å vise at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$, må vi sjekke at betingelse a) og b) i definisjon 4.11.6 er oppfylt. For å vise at a) er oppfylt antar vi at $\mathbf{u} \in H$ og at $c \in \mathbb{R}$, og må vise at $c\mathbf{u} \in H$. Siden $\mathbf{u} \in H$, er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dermed er $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) = c \cdot 0 = 0$, og følgelig er $c\mathbf{u} \in H$.

For å vise at b) er oppfylt antar vi at $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, og må vise at $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in H$. Siden $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H$, er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$ og $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$. Dermed er $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 + 0 = 0$, og følgelig er $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in H$. ♣

Vi trenger en liten hjelpesetning før vi går videre:

Lemma 4.11.7 *Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in H$. Da er*

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \in H$$

for alle $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$

Bevis: Ifølge punkt a) i definisjon 4.11.6 er $c_1\mathbf{a}_1$, $c_2\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $c_m\mathbf{a}_m \in H$. Ifølge punkt b) er dermed $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 \in H$. Bruker vi punkt b) en gang til, ser vi at $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = (c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2) + c_3\mathbf{a}_3 \in H$. Fortsetter vi på denne måten, får vi til slutt at $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \in H$ (bruk gjerne induksjon til å føre et formelt bevis!) $\Box$

Her kommer resultatet vi annonserte tidligere:

Setning 4.11.8 *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Da finnes det en lineært uavhengig mengde vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n$ slik at $H = Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$.*

Bevis: La m være det største antall lineært uavhengige vektorer man kan finne i H, og la $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \in H$ være en maksimal mengde av lineært uavhengige elementer (vi vet at $m \leq n$ siden det ikke er mulig å finne mer enn n lineært uavhengige elementer i hele $\mathbb{R}^n$). Fra lemmaet ovenfor vet vi at $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) \subset H$, så alt vi behøver å vise er at enhver $\mathbf{b} \in H$ faktisk ligger i $Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, dvs. at $\mathbf{b}$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Dette er ikke så vanskelig: Siden $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ er en maksimal lineært uavhengig mengde, vet vi at $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ er lineært avhengige, og følgelig finnes det tall $c_1, c_2, \ldots, c_n, d$ som ikke alle er 0, slik at

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m + d\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

Vi ser at d ikke kan være 0 for da hadde vi hatt en lineær avhengighet mellom $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Men dermed kan vi dele på d og få

$$\mathbf{b} = (-d^{-1}c_1)\mathbf{a}_1 + (-d^{-1}c_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (-d^{-1}c_m)\mathbf{a}_m$$

Dette viser at $\mathbf{b}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. $\Box$

Vi kan nå generalisere basisbegrepet til underrom:

Definisjon 4.11.9 *Anta at H er et underrom av $\mathbb{R}^n$. En lineært uavhengig mengde $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ slik at $H = Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$ kalles en* basis *for H.*

Setningen ovenfor viser at et underrom alltid har en basis. Den neste setningen forteller oss at alle basiser for H har like mange elementer.

Setning 4.11.10 *Anta H er et underrom av $\mathbb{R}^n$. Da har alle basiser for H like mange elementer.*

Bevis: Anta for motsigelse at det finnes to basiser $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\ldots$, $\mathbf{a}_m$ og $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,$\ldots$, $\mathbf{b}_k$ for H med et ulikt antall elementer, la oss si $k > m$. Siden

$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ ligger i $H = Sp(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m)$, kan $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ skrives som lineærkombinasjoner av $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$. Det finnes altså tall c_{ij} slik at

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{b}_1 &=& c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{1m}\mathbf{a}_m \\ \mathbf{b}_2 &=& c_{21}\mathbf{a}_1 + c_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{2m}\mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \mathbf{b}_k &=& c_{k1}\mathbf{a}_1 + c_{k2}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{km}\mathbf{a}_m \end{array}$$

Vektorene

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ \vdots \\ c_{1m} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} c_{21} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{2m} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{c}_k = \begin{pmatrix} c_{k1} \\ c_{k2} \\ \vdots \\ c_{km} \end{pmatrix}$$

må være lineært avhengige siden $k > m$. Det finnes altså tall $x_1, x_2, \ldots, x_k$ som ikke alle er 0, slik at

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_k\mathbf{c}_k = \mathbf{0}$$

Skriver vi ut dette uttrykket, ser vi at

$$\begin{pmatrix} x_1c_{11} + x_2c_{21} + \cdots + x_kc_{k1} \\ x_1c_{12} + x_2c_{22} + \cdots + x_kc_{k2} \\ \vdots \\ x_1c_{1m} + x_2c_{2m} + \cdots + x_kc_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Men dermed er

$$\begin{array}{rl} & x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + \cdots + x_k\mathbf{b}_k = \\ = & \quad x_1(c_{11}\mathbf{a}_1 + c_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{1m}\mathbf{a}_m) \\ & +x_2(c_{21}\mathbf{a}_1 + c_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{2m}\mathbf{a}_m) \\ & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ & +x_k(c_{k1}\mathbf{a}_1 + c_{k2}\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{km}\mathbf{a}_m) \\ = & \quad (x_1c_{11} + x_2c_{21} + \cdots + x_kc_{k1})\mathbf{a}_1 + \\ & +(x_1c_{12} + x_2c_{22} + \cdots + x_kc_{k2})\mathbf{a}_2 + \\ & \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ & +(x_1c_{1m} + x_2c_{2m} + \cdots + x_kc_{km})\mathbf{a}_m = \\ = & 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0} \end{array}$$

Dette er en selvmotsigelse siden $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k$ er lineært uavhengige. Eneste mulige konklusjon er at alle basiser for H har like mange elementer. $\square$

Vi vet fra før at alle basiser for det n-dimensjonale rommet $\mathbb{R}^n$ har nøyaktig n elementer. Det er derfor naturlig å utvide dimensjonsbegrepet til underrom på denne måten:

Definisjon 4.11.11 *La $H \neq \{0\}$ være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Med* dimensjonen *til H mener vi antall elementer i en basis for H. Dimensjonen til H betegnes med* $\dim(H)$.

Vi har tidligere nevnt at vi skal bevise spektralteoremet ved induksjon, og det er dimensjonen til underrom vi skal bruke induksjon på. Den neste setningen kommer til å spille en nøkkelrolle i dette argumentet.

Setning 4.11.12 *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$, og la $\mathbf{a}$ være en ikke-null vektor i H. Da er*

$$H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

et underrom av $\mathbb{R}^n$, og $\dim(H_{\mathbf{a}^\perp}) = \dim(H) - 1$. Dersom $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$, så er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ en basis for H (dersom $H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{0}\}$ betyr dette at $\mathbf{a}$ alene utgjør en basis for H).

Bevis: At $H_{\mathbf{a}^\perp}$ er et underrom, sjekkes på akkurat samme måte som i eksempel 2. Vi overlater tilfellet der $H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{0}\}$ til leserne, og antar at $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$. Vår jobb å bevise at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er en basis for H. Vi må da sjekke at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er lineært uavhengige og utspenner hele H.

Vi begynner med uavhengigheten. Vi må vise at dersom

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k + d\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

så er $c_1 = c_2 = \cdots c_k = d = 0$. Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{a}$ på begge sider av formelen ovenfor og bruker at $\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_i = 0$ (siden $\mathbf{v}_i \in H_{\mathbf{a}^\perp}$), får vi

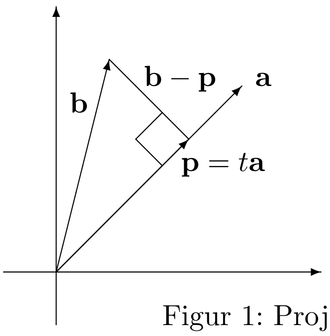
$$d|\mathbf{a}|^2 = 0$$

Siden $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, betyr dette at $d = 0$. Dermed står vi igjen med

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

og siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ er lineært uavhengig, betyr dette at $c_1 = c_2 = \cdots c_k = 0$. Vi har altså vist at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ er lineært uavhengige.

Det gjenstår å vise at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$ utspenner hele H, dvs. at enhver $\mathbf{b} \in H$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{a}$. Gitt en $\mathbf{b} \in H$, lar vi $\mathbf{p}$ være projeksjonen av $\mathbf{b}$ ned på $\mathbf{a}$ (se figur 1 og husk setning 1.2.2).



Figur 1: Projeksjonen $\mathbf{p}$ av $\mathbf{b}$ ned på $\mathbf{a}$

Legg merke til at siden $\mathbf{p} = t\mathbf{a}$ for et tall t, så er $\mathbf{b} - \mathbf{p} = \mathbf{b} + (-t)\mathbf{a}$ med i H. I tillegg står $\mathbf{b} - \mathbf{p}$ per konstruksjon normalt på $\mathbf{a}$, og er følgelig et element i $H_{\mathbf{a}^\perp}$. Siden $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_k$ er en basis for $H_{\mathbf{a}^\perp}$, finnes det dermed tall $c_1, c_2, \ldots, c_m$ slik at

$$\mathbf{b} - \mathbf{p} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

Siden $\mathbf{p}$ er parallell med $\mathbf{a}$, finnes det som allerede nevnt et tall t slik at $\mathbf{p} = t\mathbf{a}$. Dermed er

$$\mathbf{b} = t\mathbf{a} + c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_m\mathbf{v}_m$$

Dette viser at $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{a}$ utspenner hele H, og beviset er fullført. $\square$

Det er ofte nyttig å vite at alle underrom har en *ortonormal* basis (husk at dette er en basis der vektorene har lengde én og står normalt på hverandre). Metoden vi bruker for å skaffe oss en ortonormal basis, kalles *Gram-Schmidt-ortogonalisering* og er nyttig i mange sammenhenger.

Setning 4.11.13 *Ethvert underrom $H \neq \{\mathbf{0}\}$ av $\mathbb{R}^n$ har en ortonormal basis.*

Bevis: La $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ være en basis for H. Vi skal omdanne denne basisen til en ortonormal basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$. Vi gjør dette trinnvis, og sørger hele tiden for at $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ er en ortonormal mengde som utspenner det samme underrommet som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Prosedyren starter med at vi setter $\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{|\mathbf{v}_1|}$. Vi normaliserer altså $\mathbf{v}_1$ slik at den får lengde 1. Det er klart at $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{w}_1$ utspenner det samme underrommet.

Nest skritt i prosedyren er å finne $\mathbf{w}_2$. Vi definerer først en vektor $\mathbf{w}_2'$ ved

$$\mathbf{w}_2' = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2)\mathbf{w}_1$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{w}_1$ på begge sider, ser vi at

$$\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_2' = \mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_2 - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v_2})(\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1) = 0$$

siden $\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1 = |\mathbf{w}_1|^2 = 1$. Dette viser at $\mathbf{w}_2'$ og $\mathbf{w}_1$ er ortogonale. Siden $\mathbf{w}_2'$ kan uttrykkes ved hjelp av $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{w}_1$ (og $\mathbf{v}_2$ kan uttrykkes ved hjelp av $\mathbf{w}_2'$ og $\mathbf{w}_1$), er det lett å se at $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2'$ utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$. Vi avslutter dette trinnet med å sette $\mathbf{w}_2 = \frac{\mathbf{w}_2'}{|\mathbf{w}_2'|}$ for å få en vektor med lengde én (dette ødelegger ikke de egenskapene vi allerede har sjekket).

Vi beskriver nå det generelle skrittet i prosedyren. Anta at vi har greid å finne en ortonormal mengde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ som utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$. Vi definerer først vektoren $\mathbf{w}_{k+1}'$ ved:

$$\mathbf{w}_{k+1}' = \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_1 - (\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_2 - \cdots - (\mathbf{w}_k \cdot \mathbf{v}_{k+1})\mathbf{w}_k \quad (4.11.1)$$

Tar vi skalarproduktet med $\mathbf{w}_i$ (der $i \leq k$) på begge sider, får vi

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_{k+1}' = \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_{k+1} - (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{v}_{k+1}) \cdot (\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_i) = 0$$

der vi har brukt at $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k$ er ortonormale. Dette betyr at $\mathbf{w}_{k+1}$ står normalt på $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$,..., $\mathbf{w}_k$ som allerede står normalt på hverandre. Ved hjelp av ligning (4.11.1) er det lett å se at $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{w}_{k+1}'$ utspenner samme mengde som $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{k+1}$, som igjen utspenner samme mengde som $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$. Til slutt setter vi $\mathbf{w}_{k+1} = \frac{\mathbf{w}_{k+1}'}{|\mathbf{w}_{k+1}'|}$ for å få en vektor med lengde 1 (hvordan vet du at $|\mathbf{w}_{k+1}'|$ ikke er lik 0?). Dermed har vi fått en ortonormal mengde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k+1}$ som utspenner samme underrom som $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{k+1}$

Fortsetter vi denne prosedyren helt til det ikke er flere $\mathbf{v}$'er igjen, får vi en ortonormal basis $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_m$ for H. □

Vi har nå den informasjonen vi trenger om underrom, og kan isteden vende blikket mot symmetriske lineæravbildninger.

Symmetriske lineæravbildninger

Husk (fra seksjon 2.8) at en *lineæravbildning* fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ er en funksjon $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ slik at

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $c \in \mathbb{R}$ og alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

Til enhver slik lineæravbildning finnes det en matrise A slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (se setning 2.8.4), og vi har derfor stort sett arbeidet med matriser istedenfor lineæravbildninger. I denne seksjonen trenger vi imidlertid å arbeide med lineæravbildninger definert på underrom av $\mathbb{R}^n$, og da er det tungvint å bruke matriser istedenfor lineæravbildninger.

Vi begynner med å generalisere begrepet lineæravbildning til underrom.

Definisjon 4.11.14 *Anta at* H *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$*. En funksjon* $\mathbf{T} : H \to H$ *kalles en* lineæravbildning *dersom*

(i) $\mathbf{T}(c\mathbf{x}) = c\mathbf{T}(\mathbf{x})$ *for alle* $c \in \mathbb{R}$ *og alle* $\mathbf{x} \in H$

(ii) $\mathbf{T}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{T}(\mathbf{y})$ *for alle* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$

Vi skal ofte arbeide med lineæravbildninger som i utgangspunktet er definert på en større mengde enn H (gjerne på hele $\mathbb{R}^n$). Vi kan oppfatte disse som lineæravbildninger fra H til H dersom $\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in H$ for alle $\mathbf{x} \in H$. I så fall sier vi at $\mathbf{T}$ *avbilder* H *inn i* H.

Med korollar 4.11.3 som inspirasjon er det lett å definere *symmetriske* lineæravbildninger.

Definisjon 4.11.15 *En lineæravbildning* $\mathbf{T} : H \to H$ *kalles* symmetrisk *dersom*

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{y}) \qquad \textit{for alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in H$$

Det er også lett å generalisere begrepene egenverdi og egenvektor til underrom:

Definisjon 4.11.16 *En ikke-null vektor* $\mathbf{v} \in H$ *kalles en* egenvektor *for lineæravbildningen* $\mathbf{T} : H \to H$ *dersom det finnes et tall* $\lambda \in \mathbb{R}$ *slik at* $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$*. Tallet* λ *kalles en egenverdi for* $\mathbf{T}$*.*

Bemerkning: Legg merke til at vi nå bare tillater *reelle* egenverdier og egenvektorer. Det er for å slippe å snakke om den komplekse versjonen av underrommet H. Siden vi for øyeblikket kun er interessert i symmetriske lineæravbildninger (som bare har reelle egenvektorer og egenverdier), taper vi ikke noe på å holde oss til det reelle tilfellet.

Det neste resultatet generaliserer setning 4.11.5 til symmetriske lineæravbildninger på underrom. Beviset kan se ut som et skittent triks, men det er faktisk eksempel på en generell teknikk (men hva er en matematisk teknikk annet enn et skittent triks som brukes mer enn én gang?) Synes du beviset er mysteriøst, kan det være lurt å ta en kikk på bemerkningen som følger etter det (men bemerkningen forutsetter nok at du prøvd å lese beviset først).

Setning 4.11.17 *Anta at* $H \neq \{\mathbf{0}\}$ *er et underrom av* $\mathbb{R}^n$*. Da har enhver symmetrisk lineæravbildning* $\mathbf{T} : H \to H$ *minst én egenvektor:*

Bevis: Velg en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ for H. Vi kan skrive bildene $\mathbf{T}(\mathbf{v}_1)$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_2)$, $\ldots$, $\mathbf{T}(\mathbf{v}_m)$ som lineærkombinasjoner av basisvektorene:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) & = & c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m1}\mathbf{v}_m \\
\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) & = & c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m2}\mathbf{v}_m \\
\vdots & \vdots & \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{T}(\mathbf{v}_m) & = & c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{mm}\mathbf{v}_m
\end{array}$$

Siden basisen er ortonormal, vet vi fra setning 4.9.7 at

$$c_{ij} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i$$

Tilsvarende er

$$c_{ji} = \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_j$$

Siden $\mathbf{T}$ er symmetrisk, er $\mathbf{T}(\mathbf{v}_j) \cdot \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{v}_j$. Det betyr at $c_{ji} = c_{ij}$, og følgelig er matrisen

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

symmetrisk. Vi vet fra setning 4.11.5 at C har minst én reell egenverdi λ med tilhørende (reell) egenvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Dette betyr at $C\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, og skriver vi ut denne ligningen komponentvis, får vi

$$\begin{array}{rcl} x_1c_{11} + x_2c_{12} + \ldots + x_mc_{1m} & = & \lambda x_1 \\ x_1c_{21} + x_2c_{22} + \ldots + x_mc_{2m} & = & \lambda x_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1c_{m1} + x_2c_{m2} + \ldots + x_mc_{mm} & = & \lambda x_m \end{array}$$

Vi er nå kommet til poenget som er å vise at $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m$ er en egenvektor for $\mathbf{T}$ med egenverdi λ. Dette er bare et regnestykke (legg merke til hvordan vi bruker ligningene ovenfor):

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T}(\mathbf{v}) & = & x_1\mathbf{T}(\mathbf{v}_1) + x_2\mathbf{T}(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_m\mathbf{T}(\mathbf{v}_m) \\ & = & \quad x_1(c_{11}\mathbf{v}_1 + c_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m1}\mathbf{v}_m) \\ & & +x_2(c_{12}\mathbf{v}_1 + c_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{m2}\mathbf{v}_m) \\ & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & & +x_m(c_{1m}\mathbf{v}_1 + c_{2m}\mathbf{v}_2 + \cdots + c_{mm}\mathbf{v}_m) \\ & = & \quad (x_1c_{11} + x_2c_{12} + \ldots + x_mc_{1m})\mathbf{v}_1 \\ & & +(x_1c_{21} + x_2c_{22} + \ldots + x_mc_{2m})\mathbf{v}_2 \\ & & \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & & +(x_1c_{m1} + x_2c_{m2} + \ldots + x_mc_{mm})\mathbf{v}_m \\ & = & \lambda x_1\mathbf{v}_1 + \lambda x_2 + \mathbf{v}_2 \ldots + \lambda x_m\mathbf{v}_m = \lambda\mathbf{v} \end{array}$$

Dette viser at $\mathbf{v}$ er en egenvektor med egenverdi λ, og dermed er beviset fullført. $\square$

Bemerkning: Ved første øyekast kan beviset ovenfor se ut som et umotivert regnestykke som på mystisk vis ender opp med det svaret vi ønsker oss. Beviset har imidlertid en klar idé: Vi konstruerer en matrise C slik at den tilhørende lineæravbildningen (la oss kalle den $\hat{\mathbf{T}}$) oppfører seg på akkurat samme måte overfor basisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$ i $\mathbb{R}^m$ som $\mathbf{T}$ oppfører seg overfor basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ i H. På grunn av setning 4.11.5 vet vi at $\hat{\mathbf{T}}$ har en egenvektor $\mathbf{x}$. Vi konstruerer så en vektor $\mathbf{v}$ som forholder seg på akkurat samme måte til basisen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ som $\mathbf{x}$ forholder seg til basisen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_m$. Da er det ikke så merkelig at $\mathbf{v}$ er en egenvektor for $\mathbf{T}$ med samme egenverdi som $\mathbf{x}$.

Vi er nå kommet frem til det siste resultatet vi trenger før vi kan gå løs på selve beviset for spektralteoremet. Det peker på en viktig egenskap som skiller symmetriske lineæravbildninger fra generelle lineæravbildninger, og som er helt nødvendig for å få beviset for spektralteoremet til å fungere.

Setning 4.11.18 *La H være et underrom av $\mathbb{R}^n$ og anta at $\mathbf{T} : H \to H$ er en symmetrisk lineæravbildning. Anta videre at $\mathbf{a}$ er en egenvektor for T, og la*

$$H_{\mathbf{a}^\perp} = \{\mathbf{x} \in H \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0\}$$

være det ortogonale komplementet til $\mathbf{a}$ i H. Da avbilder T underrommet $H_{\mathbf{a}^\perp}$ inn i seg selv, dvs. at dersom $x \in H_{\mathbf{a}^\perp}$, så er også $T(\mathbf{x}) \in H_{\mathbf{a}^\perp}$.

Bevis: Anta at $x \in H_{\mathbf{a}^\perp}$. Da er $\mathbf{x} \cdot \mathbf{a} = 0$, og siden $\mathbf{T}$ er symmetrisk, har vi

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(\mathbf{a}) = \mathbf{x} \cdot (\lambda \mathbf{a}) = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}) = 0$$

der λ er egenverdien til $\mathbf{a}$. Dette viser at $T(\mathbf{x}) \in H_{\mathbf{a}^\perp}$. $\square$

Bevis for spektralteoremet

Vi er nå klare for å bevise spektralteoremet. For å få induksjonsargumentet vårt til å fungere, må vi bevise et litt mer generelt resultat:

Teorem 4.11.19 (Spektralteoremet for underrom) *Anta at $H \neq \{\mathbf{0}\}$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$, og at $\mathbf{T} : H \to H$ er en symmetrisk lineæravbildning. Da har H en ortonormal basis som består av egenvektorer for T.*

Bemerkning: Siden $H = \mathbb{R}^n$ er et underrom av $\mathbb{R}^n$ og alle symmetriske $n \times n$-matriser A definerer en symmetrisk lineæravbildning $\mathbf{T}$ ved $\mathbf{T}(\mathbf{x}) =$

$A\mathbf{x}$, ser vi at teoremet ovenfor medfører den opprinnelige versjonen av spektralteoremet i 4.11.1.

Bevis for teorem 4.11.19: Vi beviser teoremet ved induksjon på dimensjonen til underrommet H. Anta først at H har dimensjon 1. Da har H en basis som bare består av én vektor $\mathbf{v}$. Vi kan anta at $|\mathbf{v}| = 1$ (hvis ikke bytter vi bare ut $\mathbf{v}$ med $\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$). Siden $\mathbf{T}(\mathbf{v}) \in H$, må det finnes et tall c slik at $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = c\mathbf{v}$. Men da er $\mathbf{v}$ en egenvektor med egenverdi c, og basisen som bare består av $\mathbf{v}$, er derfor en ortonormal basis av egenvektorer (ortogonaliteten er trivielt oppfylt siden $\mathbf{v}$ ikke har noen basiskompanjonger å stå ortogonalt på).

Anta så at teoremet gjelder for alle underrom med dimensjon m og at H har dimensjon $m + 1$. Ifølge setning 4.11.17 har en symmetrisk lineæravbildning $\mathbf{T} : H \to H$ i hvert fall én egenvektor $\mathbf{a}$ som vi kan velge til å ha lengde 1. Ifølge 4.11.18 avbilder T det ortogonale komplementet $H_{\mathbf{a}^\perp}$ inn i seg selv. Setning 4.11.12 forteller oss at $H_{\mathbf{a}^\perp}$ har dimensjon m, og ifølge induksjonsantagelsen har dermed $H_{\mathbf{a}^\perp}$ en ortonormal basis $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ av egenvektorer for $\mathbf{T}$. Ifølge setning 4.11.12 er da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{a}$ en basis for H, og den består åpenbart bare av egenvektorer. Siden $\mathbf{a}$ står ortogonalt på alle vektorer i $H_{\mathbf{a}^\perp}$ (og dermed spesielt på $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$), er basisen ortonormal. $\square$