MAT 1110: Obligatorisk oppgave 1, V-07

Innleveringsfrist: *Fredag 23. februar, 2006, kl.14.30, på Ekspedisjonskontoret til Matematisk institutt (7. etasje NHA). Erfaringsmessig blir det lange køer både ved skriverne og utenfor ekspedisjonskontoret rett før innleveringsfristen, så det er smart å levere tidligere.* **Husk å skrive navn på besvarelsen!** *Se forøvrig*

http://www.math.uio.no/academics/obligregler.shtml

for nærmer informasjon om regler for obligatoriske oppgaver. Husk spesielt å søke om utsettelse til studieinfo@math.uio.no *før innleveringsfristen dersom du blir syk!*

Instruksjoner: *Oppgaven er obligatorisk, og studenter som ikke får besvarelsen godkjent, vil ikke få adgang til avsluttende eksamen. For å få besvarelsen godkjent, må man ha minst 60% score, og det vil bli lagt vekt på at man har en klar og ryddig besvarelse med gode begrunnelser. Det vil også bli lagt vekt på at MATLAB-delen av oppgavene er rimelig godt besvart — besvarelser som røper mangelfulle MATLAB-ferdigheter, kan bli underkjent selv om de har en score på mer enn 60%. De grunnleggende MATLAB-ferdighetene som testes i dette oppgavesettet, er plotting av funksjoner og kurver, samt behandling av m-filer.*

Alle delspørsmål (1a, 1b osv.) teller like mye. Du kan få poeng på en oppgave selv om du ikke er kommet frem til et svar, og det er derfor viktig at du leverer inn alt det du har kommet frem til. Studenter som ikke får sin opprinnelige besvarelse godkjent, men som har gjort et reelt forsøk på å løse oppgavene, vil få én mulighet til å levere en revidert besvarelse.

Det er lov å samarbeide og å bruke alle slags hjelpemidler. Den innleverte besvarelsen skal imidlertid være skrevet av deg *og gjenspeile* din *forståelse av stoffet. Du skal selv ha gjennomført alle MATLAB-kjøringer. Er vi i tvil om at du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.*

Alle svar skal begrunnes. Der oppgaven krever at du skal bruke MATLAB må du legge ved utskrifter av m-filer og figurer. Du må også redegjøre for hvilke andre kommandoer og rutiner du har brukt, f.eks. ved å legge ved en dagbokfil ("diary") med kommentarer.

Oppgave 1. I denne oppgaven skal vi se nærmere på funksjonene

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{og} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(trenger du hjelp, kan du lese om disse funksjonene i seksjon 7.7 i *Kalkulus* og seksjon 3.6 i Adams' bok).

a) Vis at $(\sinh x)' = \cosh x$, $(\cosh x)' = \sinh x$ og $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

b) Bruk MATLAB til å tegne grafene til $\sinh x$ og $\cosh x$ i samme koordinatsystem. Bruk samme enhet på begge aksene.

c) Bruk MATLAB til å tegne den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = 4\cosh t\,\mathbf{i} + 3\sinh t\,\mathbf{j} \qquad \text{for } t \in [-2, 2]$$

Bruk samme enhet på begge aksene. Forklar at denne kurven er del av et kjeglesnitt.

d) Løs integralet $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ ved å gjøre substitusjonen $x = \sinh u$.

e) Regn ut lengden av den parametriserte kurven

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} \qquad \text{for } t \in [0,1]$$

Oppgave 2. I denne oppgaven er funksjonene $\mathbf{T}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{T}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ og $\mathbf{T}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\mathbf{T}_1(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$, $\mathbf{T}_2(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right)$ og $\mathbf{T}_3(x,y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

a) La S være den likesidede trekanten med hjørner i punktene $(0,0)$, $(1,0)$ og $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Beskriv bildene $\mathbf{T}_1(S)$, $\mathbf{T}_2(S)$ og $\mathbf{T}_3(S)$ av S under henholdsvis $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (husk at generelt er $\mathbf{T}(S) = \{\mathbf{T}(x,y) \mid (x,y) \in S\}$).

b) La S_1 være det samlede bildet av S under $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (vi har altså $S_1 = \mathbf{T}_1(S) \cup \mathbf{T}_2(S) \cup \mathbf{T}_3(S)$). Beskriv bildet S_2 av S_1 under $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{T}_2$ og $\mathbf{T}_3$ (vi har altså $S_2 = \mathbf{T}_1(S_1) \cup \mathbf{T}_2(S_1) \cup \mathbf{T}_3(S_1)$). Lag en skisse av S_1 og S_2. Hvordan tror du S_3 og S_4 blir seende ut? Hvordan går det når du tegner inn S_n for alle n?

Vi skal nå se på følgende prosedyre: Start med et punkt i (x_1, y_1) i planet. Velg tilfeldig én av funksjonen $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$, og la (x_2, y_2) være det punktet vi får når vi bruker denne funksjonen på (x_1, y_1). Velg på ny én av funksjonen $\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \mathbf{T}_3$ på en tilfeldig måte, og la (x_3, y_3) være det punktet vi får når vi bruker denne funksjonen på (x_2, y_2). Fortsetter vi på denne måten, får vi en følge av punkter $\{(x_n, y_n)\}$ i planet. Det viser seg at denne følgen alltid hoper seg opp på den samme mengden. Vi skal undersøke dette fenomenet nærmere.

c) Forklar at følgende MATLAB-program er en implementering av prosedyren ovenfor.

```
function [x,y]=Sierpinski(a,b,N)
x(1)=a;
y(1)=b;
for n=1:N
z=rand;
if z<=1/3
x(n+1)=x(n)/2;
y(n+1)=y(n)/2;
elseif z<=2/3
```

```
x(n+1)=x(n)/2+1/2;
y(n+1)=y(n)/2;
else
x(n+1)=x(n)/2+1/4;
y(n+1)=y(n)/2+sqrt(3)/4;
end
end
plot(x,y,'.')
```

Du må sannsynligvis bruke MATLABs hjelpefunksjon for å finne ut av noen av kommandoene.

d) Legg programmet ovenfor på en m-fil og kjør det med forskjellige inputverdier a, b og N. Beskriv det du ser. Velg noen av kjøringene, og presenter dem i samme figur ved hjelp av kommandoen `subplot`. (*Hint:* Du bør velge N opp til størrelsesorden 10 000 for å få et godt bilde, men det er lærerikt også å se på mindre verdier av N. Det kan også være lurt å bruke kommandoen `axis('equal')` før du lagrer bildene.)

e) Undersøk også hvordan programmet nedenfor fungerer (rett opp figurene med `axis('equal')`).

```
function [x,y]=blomst(r,d,s,N)
x(1)=1;
y(1)=0;
for n=1:N
z=rand;
if z<=0.95
x(n+1)=r*(x(n)*cos(pi/d)-y(n)*sin(pi/d));
y(n+1)=r*(x(n)*sin(pi/d)+y(n)*cos(pi/d));
elseif z>.95
x(n+1)=s*x(n)+1;
y(n+1)=s*y(n);
end
end
plot(x,y,'.')
```

Kjør programmet først med $r = 0.97, d = 7, s = \frac{1}{6}, N = 10\,000$, men eksperimenter også med andre verdier. Bruk de to funksjonene $\mathbf{F}_1(x,y) = r(x\cos\frac{\pi}{d} - y\sin\frac{\pi}{d}, x\sin\frac{\pi}{d} + y\cos\frac{\pi}{d})$ og $\mathbf{F}_2(x,y) = (sx+1, sy)$ til å forklare hvordan bildene fremkommer.(*Hint:* I en "typisk" kjøring vil man velge $\mathbf{F}_1$ mange ganger før $\mathbf{F}_2$ dukker opp første gang. Deretter kommer sannsynligvis en ny sekvens av $\mathbf{F}_1$'ere osv. Prøv å knytte dette bildet til de geometriske tolkningene av $\mathbf{F}_1$ og $\mathbf{F}_2$.)