Oppgaver og fasit til seksjon 3.1-3.3

Oppgaver til seksjon 3.1

1. Regn ut $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ når

a) $\mathbf{a} = (-1, 3, 2)$ $\mathbf{b} = (-2, 1, 7)$ b) $\mathbf{a} = (4, -3, 1)$ $\mathbf{b} = (-6, 1, 0)$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (-2, 3, 1)$ og $\mathbf{b} = (4, 0, -2)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(0, -1, 2)$, $(2, -1, 4)$ og $(3, 0, 4)$. Finn arealet.

4. Finn en vektor som står normalt på både $(2, 0, -3)$ og $(-1, 3, 4)$.

5. Regn ut $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i}$.

6. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(3, -2, -2)$, $(0, 0, 4)$ og $(-3, 2, 1)$.

7. En pyramide har hjørner i punktene $(2, -1, 2)$, $(0, 5, -3)$, $(2, 4, 6)$ og $(3, -2, 4)$. Finn volumet.

8. Finn en ligning for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -2, -6)$, $\mathbf{c} = (2, 3, 3)$.

9. Finn en ligning for planet som går gjennom punktene $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 3, 0)$, $\mathbf{c} = (2, 1, -1)$.

10. Anta at alle hjørnene i et parallellepiped har heltallige koeffisienter. Vis at volumet er et helt tall.

11. Bevis setning 3.1.1b).

I Adams' bok finner du flere oppgaver om vektorproduktet i seksjon 10.3 og flere oppgaver om plan i seksjon 10.4.

Oppgaver til seksjon 3.2

1. Regn ut determinantene

a) $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2. Finn arealet til parallellogrammet utspent av $\mathbf{a} = (1, 3)$ og $\mathbf{b} = (4, 1)$.

3. En trekant har hjørner i punktene $(-1, 2)$, $(4, 3)$, $(1, 7)$. Finn arealet.

4. En firkant har hjørner i punktene $(0, 1)$, $(5, 1)$, $(1, 7)$ og $(7, 4)$. Finn arealet.

5. Avgjør om parene $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt eller negativt orientert:

a) $\mathbf{a} = (3, -1)$ $\mathbf{b} = (-7, 2)$ b) $\mathbf{a} = (-1, 5)$ $\mathbf{b} = (3, 2)$

6. Vis at $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ hvis og bare hvis vektorene $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ er parallelle eller en av dem er $\mathbf{0}$.

7. Vis at $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$, dvs. at vi får den samme determinanten om vi bytter om linjer og søyler.

8. Alle hjørnene til et parallellogram har heltallige koordinater. Vis at arealet er et helt tall.

9. Anta at $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

a) Vis at ligningssystemet $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ har løsningen

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad\qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

b) Hva skjer med ligningssystemet når $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$?

10. Regn ut determinantene:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & 4 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix}$$

11. Finn volumet til parallellepipedet utspent av $(-1, 0, 2)$, $(3, -1, 3)$ og $(4, 0, -1)$.

12. Finn volumet til pyramiden med hjørner i punktene $(2, 2, 2)$, $(-1, 2, 3)$, $(3, 4, 2)$ og $(7, 2, 2)$.

13. Avgjør om trippelet $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt eller negativt orientert når $\mathbf{a} = (-1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 4)$ og $\mathbf{c} = (7, -1, 2)$.

14. Vis at $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, dvs. at determinanten er den samme om vi bytter om søyler og linjer.

15. Vis at dersom $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$ er ortogonale, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}||\mathbf{c}|$.

16. Regn ut determinanten til 4×4-matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

17. I denne oppgaven er $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ og $\mathbf{d}$ tredimensjonale vektorer.

a) Vis at dersom to av vektorene $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ er like, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ og alle skalarer s, t gjelder

$$\det(s\mathbf{a} + t\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = s\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) + t\det(\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

c) Vi sier at en vektor $\mathbf{a}$ er en *lineærkombinasjon* av vektorene $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ dersom det finnes skalarer s, t slik at $\mathbf{a} = s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. Bruk a) og b) til å vise at dersom $\mathbf{a}$ er en lineærkombinasjon av $\mathbf{b}$ og $\mathbf{c}$, så er $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

d) Gi en geometrisk forklaring på resultatet i c).

18. Bevis setning 3.2.3 ved regning (dvs. regn ut begge sider av likhetene og se at de stemmer).

19. Bevis setning 3.2.6 ved regning (dvs. regn ut begge sider av likhetene og se at de stemmer).

I Adams' bok er det flere oppgaver om determinanter og volumer i seksjon 10.3. Det er noen få oppgaver om høyere ordens determinanter i seksjon 10.6.

Oppgaver til seksjon 3.3

1. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

2. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos t, t \sin t)$. Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

3. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (t, e^{-t}, \sin t)$.

4. Finn hastigheten og akselerasjonen når $\mathbf{r}(t) = (\ln t, t^2, \cos t)$.

5. En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t, b \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Vis at denne kurven er ellipsen med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

b) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

c) Vis at omkretsen til ellipsen er $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\, dt$. Sett $a = 5$, $b = 3$ og finn omkretsen ved å bruke numerisk integrasjon på en lommeregner eller en datamaskin.

6. Finn buelengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = (t^2, t^3) \qquad t \in [0, 10]$$

7. En kurve er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, \ln(\cos t))$ for $t \in [0, \pi/4]$.

a) Finn hastigheten $\mathbf{v}(t)$ og farten $v(t)$.

b) Finn buelengden (Hint: For å integrere $\frac{1}{\cos x}$ kan det være nyttig å bruke at $\frac{1}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 - \sin^2(x)}$).

8. Vi har $\mathbf{r}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \sin t)$.

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Finn buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

c) Vis at kurven ligger på en kuleflate med sentrum i origo.

d) Vis at kurven ligger i planet $y - z = 0$.

e) Hva slags kurve fremstiller $\mathbf{r}$?

9. Vi har $\mathbf{r}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Vis at buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$ er $\int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt$. Bruk numerisk integrasjon til å beregne dette integralet.

c) Løs integralet i b) ved regning. Bruk substitusjonen $t = \frac{e^u - e^{-u}}{\sqrt{2}}$.

10. La $\mathbf{r}(t)$ være sykloiden i eksempel 8.

a) Finn hastigheten og akselerasjonen.

b) Vis at lengden punktet gjennomløper mens hjulet dreier en gang rundt, er $r\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t}\, dt$

c) Forklar hvorfor $\sqrt{1 - \cos t} = \frac{|\sin t|}{\sqrt{1+\cos t}}$.

d) Regn ut integralet i b).

11. Bevis (i), (ii), (iv) og (v) i setning 3.3.4.

12. En partikkel går i en sirkelbane med radius r om origo. Farten er konstant lik v. Partikkelen starter i punktet $(0, 1)$ ved tiden $t = 0$ og beveger seg mot urviserne.

a) Vis at posisjonen ved tiden t er $\mathbf{r}(t) = (r\cos(\frac{vt}{r}), r\sin(\frac{vt}{r}))$.

b) Vis at $\mathbf{a}(t) = -(\frac{v}{r})^2\mathbf{r}(t)$.

13. En kanonkule skytes ut med en fart v_0. I utskytingsøyeblikket danner kulens bane en vinkel α med horisontalplanet. Kulens posisjon etter t sekunder kaller vi $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$. Dersom vi kan se bort fra luftmotstanden, vil $x(t) = v_0 t\cos\alpha$ og $y(t) = v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2$ der g er tyngdens akselerasjon.

a) Finn $\mathbf{v}$ og $\mathbf{a}$.

b) Hvor høyt over bakken er kulen på det høyeste?

c) Hvor langt kan kanonen skyte (vi antar at bakken er horisontal)?

14. Når er steinen i eksempel 9 i det høyeste punktet på banen? Hvor høyt er dette punktet?

15. Avstanden mellom det stedet der bakhjulet til en sykkel berører bakken, og det stedet der forhjulet berører bakken, er 1 meter. Når vi sykler, etterlater både forhjulet og bakhjulet et spor i bakken.

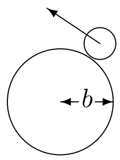
a) Anta at sporet bakhjulet etterlater seg, er gitt ved $\mathbf{r}_1(t)$. Vis at sporet forhjulet etterlater seg, har parametrisering $\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}_1(t) + \mathbf{T}_1(t)$, der $\mathbf{T}_1(t)$ er enhetstangentvektoren til $\mathbf{r}_1(t)$.

b) Anta at bakhjulet følger kurven $\mathbf{r}_1(t) = (t, \sin t)$. Finn parametriseringen $\mathbf{r}_2(t)$ til kurven som forhjulet følger.

c) Bruk en lommeregner eller en datamaskin til å tegne kurvene $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ i samme koordinatsystem.

d) Dersom du ser sporene etter en sykkel som har vinglet forbi, hvordan kan du avgjøre hvilken retning den har kjørt i?

16. Et hjul med radius a ruller på utsiden av en sirkel med radius b (se figuren). Finn en parameterfremstilling for den kurven et punkt på hjulet følger. Du kan selv velge hvordan du vil legge koordinatsystemet og hvor startpunktet er.



17. (Eksamen i MAT 100A/C, 8/12-2000) I denne oppgaven er $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ en parametrisert kurve og $\mathbf{b} = (0, y)$, $y > 0$, er et punkt på den positive y-aksen.

a) Skissér kurven og finn $\mathbf{r}'(t)$. Vis at den deriverte til funksjonen

$$f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2$$

kan skrives $f'(t) = 2\mathbf{r}'(t) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$.

b) Vi er interessert i å finne de punktene på kurven som ligger nærmest $\mathbf{b}$. Vis at dersom $\mathbf{r}(t_0)$ er et slik punkt, så er

$$\mathbf{r}'(t_0) \cdot (\mathbf{r}(t_0) - \mathbf{b}) = 0$$

Forklar denne likningen geometrisk.

c) Finn de punktene på kurven som ligger nærmest $\mathbf{b}$.

18. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, $a \leq t \leq b$, der x og y har kontinuerlige deriverte x', y'. Anta at $g : [c, d] \to [a, b]$ er en voksende funksjon med kontinuerlig derivert og at $g(c) = a$, $g(d) = b$.

a) Forklar at $\mathbf{s}(t) = \mathbf{r}(g(t))$, $c \leq t \leq d$, er en annen parametrisering av den samme kurven.

I resten av denne oppgaven skal vi vise at et par grunnleggende geometriske egenskaper til kurven er de samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

b) La $\mathbf{a} = \mathbf{s}(t_0) = \mathbf{r}(g(t_0))$ være et punkt på kurven. Vi kan regne ut to tangentvektorer i punktet $\mathbf{a}$, nemlig $\mathbf{s}'(t_0)$ og $\mathbf{r}'(g(t_0))$. Vis at disse vektorene er parallelle (vi godtar at den ene eller begge er lik $\mathbf{0}$).

c) Vis at buelengden til kurven blir den samme uansett hvilken av de to parametriseringene vi velger.

19. En partikkel beveger seg i et kraftfelt der kraften hele tiden er rettet mot eller fra origo (dette gjelder blant annet partikler i et gravitasjonsfelt eller et elektrisk felt der massen eller ladningen er konsentrert i origo). Ifølge Newtons annen lov er $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, så akselerasjonen er også rettet mot eller fra origo, Det betyr at akselerasjonen ved tiden t er gitt ved $\mathbf{a}(t) = k(t)\mathbf{r}(t)$ der $k(t)$ er en skalar størrelse.

a) Vis at $\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t)] = 0$.

b) Forklar hvorfor $\mathbf{r}(t) \times \mathbf{v}(t) = \mathbf{c}$ der $\mathbf{c}$ er en konstant vektor (uavhengig av t).

c) Vis at partikkelen hele tiden beveger seg i planet gjennom punktene $\mathbf{0}$, $\mathbf{r}(0)$ og $\mathbf{v}(0)$.

I Adams' bok finnes det flere oppgaver om parametrisert kurver, blant annet i seksjon 11.1 og 11.3.

Fasit

Seksjon 3.1

Oppgave 1: a) $(19, 3, 5)$ b) $(-1, -6, -14)$
Oppgave 2: $6\sqrt{5}$
Oppgave 3: $\sqrt{3}$
Oppgave 4: $(9, -5, 6)$
Oppgave 5: $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
Oppgave 6: 0
Oppgave 7: $\frac{7}{2}$
Oppgave 8: $2x + y - z = 4$
Oppgave 9: $3x - y + 2z = 3$
Oppgave 10: Hint: Bruk setning 3.1.4.

Seksjon 3.2

Oppgave 1: a) 14 b) 38 c) 0
Oppgave 2: 11
Oppgave 3: $\frac{23}{2}$
Oppgave 4: 27
Oppgave 5: a) negativt, b) negativt
Oppgave 6: Hint: Tolk determinanten som et areal.
Oppgave 8: Hint: Utrykk arealet som en determinant
Oppgave 9: b) Ligningssystemet har enten ingen eller uendelig mange løsninger avhengig av konstantene c_1 og c_2. Linjene $a_1x+b_1y = c_1$ og $a_2x+b_2y = c_2$ er nemlig enten parallelle (ingen løsninger) eller sammenfallende (uendelig mange løsninger).
Oppgave 10: a) 84 b) 20 c) 0
Oppgave 11: 7
Oppgave 12: $\frac{5}{3}$
Oppgave 13: Positivt
Oppgave 15: Hint: Tolk determinanten som et volum.
Oppgave 16: -127

Seksjon 3.3

Oppgave 1:
$\mathbf{v}(t) = (3t^2, 2t)$
$v(t) = t\sqrt{9t^2 + 4}$
$\mathbf{a}(t) = (6t, 2)$
$a(t) = \frac{18t^2+4}{\sqrt{9t^2+4}}$

Oppgave 2:
$\mathbf{v}(t) = (-\sin t, \sin t + t\cos t)$
$v(t) = \sqrt{2\sin^2 t + t\sin 2t + t^2\cos^2 t}$
$\mathbf{a}(t) = (-\cos t, 2\cos t - t\sin t)$
$a(t) = \frac{(3-t^2)\sin 2t + 2t(\cos 2t + \cos^2 t)}{2\sqrt{\sin^2 t + (\sin t + t\cos t)^2}}$

Oppgave 3:
$\mathbf{v}(t) = (1, -e^{-t}, \cos t)$
$\mathbf{a}(t) = (0, e^{-t}, -\sin t)$

Oppgave 4:
$\mathbf{v}(t) = (\frac{1}{t}, 2t, -\sin t)$
$\mathbf{a}(t) = (-\frac{1}{t^2}, 2, -\cos t)$

Oppgave 5:
b) $\mathbf{v}(t) = (-a\sin t, b\cos t)$
$v(t) = \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}$
$\mathbf{a}(t) = (-a\cos t, -b\sin t) = -\mathbf{r}(t)$
$a(t) = \frac{(a^2-b^2)\sin 2t}{2\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}}$
c) $s \approx 25.53$

Oppgave 6: $\frac{904^{3/2}-8}{27} \approx 1006.4$

Oppgave 7:
a) $\mathbf{v}(t) = (1, -\tan t)$
$v(t) = \frac{1}{\cos t}$
b) $\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \ln(\sqrt{2}+1)$

Oppgave 8: a) $\mathbf{v}(t) = (-2\sin t, \sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\cos t)$
$v(t) = 2$
$\mathbf{a}(t) = -\mathbf{r}(t)$
b) 4π
c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$
e) En sirkel med radius 2 om origo i planet y-z=0.

Oppgave 9:
a) $\mathbf{v}(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$
$v(t) = \sqrt{2 + t^2}$
b) 22.43
c) $\pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(\sqrt{2}\pi + \sqrt{2\pi^2 + 1})$

Oppgave 10:
a) $\mathbf{v}(t) = (r(1 - \cos t), r\sin t)$
$v(t) = r\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}$
$\mathbf{a}(t) = (r\sin t, r\cos t)$
$a(t) = \frac{r\sqrt{2}\sin t}{2\sqrt{1-\cos t}}$
d) $8r$

Oppgave 13:
a) $\mathbf{v}(t) = (v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha - gt)$
$\mathbf{a}(t) = (0, -g)$

b) $\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha$
c) $\frac{v_0^2}{g}$

Oppgave 14:
$t = \frac{m}{k}\ln(1+\frac{ku_2}{mg})$
$y_{max} = \frac{mu_2}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\ln(1+\frac{ku_2}{mg})$

Oppgave 15:
b) $\mathbf{r}_2(t) = (t + \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 t}}, \sin t + \frac{\cos t}{\sqrt{1+\cos^2 t}})$

Oppgave 16: Med origo midt i sirkelen og med startpunkt $(b, 0)$, får vi: $x(t) = (a+b)\cos t - a\cos(\frac{a+b}{a}t)$
$y(t) = (a+b)\sin t - a\sin(\frac{a+b}{a}t)$

Oppgave 17:
a) $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t)$. Finn uttrykket for $f'(t)$ ved å derivere $f(t) = |\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{b})$ etter produktregelen.
b) Geometrisk beskrivelse: Vektoren fra $\mathbf{b}$ til $\mathbf{r}(t_0)$ står normalt på tangentvektoren $\mathbf{r}'(t_0)$.
c) Dersom $y > \frac{1}{2}$, så er $(\pm\sqrt{y-\frac{1}{2}}, y-\frac{1}{2})$ de nærmeste punktene. Dersom $y \leq \frac{1}{2}$, så er $\mathbf{0} = (0, 0)$ det nærmeste punktet.