Oppgaver og fasit til seksjon 3.4-3.6

Oppgaver til seksjon 3.4

1. Anta at $f(x,y) = x^2y^3$ og $\mathbf{r}(t) = t^2\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j}$. Regn ut $g'(t)$ når $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$.

2. Anta at $f(x,y) = x^2e^{xy^2}$ og $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$. Regn ut $g'(t)$ når $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$.

3. Anta at $f(x,y,z) = x^2z - y\sin(yz)$ og $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t^2\,\mathbf{k}$. Regn ut $g'(t)$ når $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$.

4. Anta at $f(x,y,t) = ty^2\ln(x^2+1)$ og $\mathbf{r}(t) = t^3\,\mathbf{i} + (3t+1)\,\mathbf{j}$. Regn ut $g'(t)$ når $g(t) = f(\mathbf{r}(t),t)$.

5. Anta at $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ xy+x \end{pmatrix}$ og at $\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j}$. Regn ut $\mathbf{G}'(t)$ når $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$.

6. Anta at $\mathbf{F}(x,y,t) = \begin{pmatrix} x^2t+y \\ \cos(xy) \\ t^2x \end{pmatrix}$ og at $\mathbf{r}(t) = (1-t^2)\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j}$. Regn ut $\mathbf{G}'(t)$ når $\mathbf{G}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t),t)$.

7. Temperaturen i et punkt (x,y) ved tiden t er

$$f(x,y,t) = 20 + 2t - x^2 + y^2$$

En person befinner seg ved tiden t i punktet

$$\mathbf{r}(t) = (3t - \frac{t^2}{4})\,\mathbf{i} + (2t + \frac{t^2}{8})\,\mathbf{j}$$

Er temperaturen som personen opplever økende eller avtagende ved tiden $t = 1$?

8. Anta at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige annenordens partiellderiverte, og at $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ der x og y er to ganger deriverbare. La $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$.Vis at

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))\,x'(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\mathbf{r}(t))\,x'(t)y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))\,y'(t)^2 +$$

$$+\frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))\,x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))\,y''(t)$$

9. Anta at $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er en deriverbar funksjon, og la $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ være to punkter i $\mathbb{R}^n$. Vis at det finnes et punkt $\mathbf{c}$ på linjestykket fra $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ slik at

$$f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$

NB: Det er flere oppgaver om kjerneregelen i flere variable i seksjon 12.5 i Adams' bok.

Oppgaver til seksjon 3.5

1. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y) = x$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} \qquad t\in[0,2\pi]$$

2. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y) = xy$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j} \qquad t \in [0,2]$$

3. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y,z) = z\cos(xy)$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = 3t\,\mathbf{i} + 4t\,\mathbf{j} + 5t\,\mathbf{k} \qquad t \in [0,\sqrt{\pi}]$$

4. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y,z) = xz$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = 2t^3\,\mathbf{i} + 3\sqrt{2}t^2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k} \qquad t \in [0,1]$$

5. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y,z) = z$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\sin t\,\mathbf{i} + t\cos t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \qquad t \in [0,2\pi]$$

6. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$ når $f(x,y,z) = xyz$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} - e^{-t}\,\mathbf{j} + \sqrt{2}t\,\mathbf{k} \qquad t \in [0,1]$$

7. Bevis setning 3.5.2.

8. Bevis setning 3.5.3.

9. Gjennomfør beviset for setning 3.5.5 når de to parametriseringene har motsatt orientering.

10 En prosjektert vei har form som kurven

$$\mathbf{r}(t) = (2t - t^2)\,\mathbf{i} + \frac{8}{3}t^{\frac{3}{2}}\,\mathbf{j} \quad \text{for } t \in [0,1]$$

når den sees ovenfra (alle avstander er målt i kilometer). Utbygningskostnadene varierer langs veien på grunn av ulikheter i terrenget, og man regner med at prisen per kilometer er gitt ved en funksjonen av typen $p(x,y) = K(10+y)$ der K er en konstant. Finn de totale utbygningskostnadene.

11. (Eksamen i MA 105, 24/5-1991) En vei er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2}{2}\mathbf{i} + \frac{2\sqrt{2}}{9}t^{3/2}\mathbf{j} + \frac{t}{9}\mathbf{k} \qquad 1 \le t \le 7$$

(alle avstander er målt i kilometer). En bil som kjører langs veien har et bensinforbruk som avhenger av hvor bratt veien er — den bruker $\frac{1}{15} + \frac{1}{2}\frac{dz}{ds}$ liter per kílometer (s er buelengden). Finn det totale bensinforbruket.

12. En kurve i polarkordinater er gitt ved en funksjon $r = f(\theta)$ der $\theta \in [a,b]$ (kurven består altså av alle de punktene som har polarkoordinater r og θ der $r = f(\theta)$ og $\theta \in [a,b]$).

a) Vis at kurven har parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\,\mathbf{i} + f(\theta)\sin(\theta)\,\mathbf{j} \quad \text{der } \theta \in [a,b]$$

b) Vis at farten er gitt ved

$$v(\theta) = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}$$

c) En kurve er gitt i polarkoordinater ved $f(\theta) = \sin\theta$ der $\theta \in [0, \pi]$. Skisser kurven og regn ut buelengden.

d) Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} g\, ds$ der $\mathcal{C}$ er kurven i punkt c) og $g(x, y) = xy$.

NB: Det er flere oppgaver om linjeintegraler av skalarfelt i seksjon 15.4 i Adams' bok.

Oppgaver til seksjon 3.6

1. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = y\,\mathbf{i}+x\,\mathbf{j}$, og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} - 3t\,\mathbf{j} \quad \text{der } t \in [1, 3]$$

2. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = x^2\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} \quad \text{der } t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

3. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = zy\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$, og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k} \quad \text{der } t \in [0, 2]$$

4. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{z}{x}\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$, og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + \ln t\,\mathbf{j} + \sin t\,\mathbf{k} \quad \text{der } t \in [1, 2]$$

5. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$, og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + \arctan t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k} \quad \text{der } t \in [0, 1]$$

6. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$, og $\mathcal{C}$ er sirkelen med sentrum i origo og radius 5. $\mathcal{C}$ skal gjennomløpes i positiv retningen (dvs. mot klokken).

7. Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = x^2y\,\mathbf{i} + xy\,\mathbf{j}$, og $\mathcal{C}$ er den delen av parabelen $y = x^2$ som tilsvarer $x \in [-2, 2]$. Kurven skal parametriseres fra venstre mot høyre.

8. La $\mathcal{C}$ være omkretsen til trekanten med hjørner i punktene $(0, 0)$, $(\pi, 0)$ og (π, π). Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = \cos x \sin y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$ og $\mathcal{C}$ er positivt orientert.

9. Bevis setning 3.6.2.

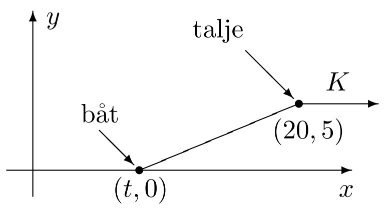
10. Bevis setning 3.6.3.

11. Gjenomfør beviset for setning 3.6.4 når de to parametriseringene har samme orientering.

12. Anta at kurven $\mathcal{C}$ er lukket. Vis at integralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ har samme verdi uansett hvilket punkt på kurven vi bruker som start-/stoppsted (forutsatt at orienteringen er den samme).

13. Helt til slutt i seksjonen påstod vi at linjeintegral av typen $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kan oppfattes som integral av typen $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$; alt vi behøver å gjøre er å velge $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}$. Hvordan kan dette være mulig når den ene typen integral er avhengig av orienteringen til kurven mens den andre typen ikke er det?

14. Figuren viser en båt som blir dratt bortover en flat strand med et tau. Tauet går gjennom en talje som er festet i punktet $(20, 5)$, og trekkraften i tauet er konstant lik K. Posisjonen til båten ved tiden $t \in [0, 20]$ er $(t, 0)$.

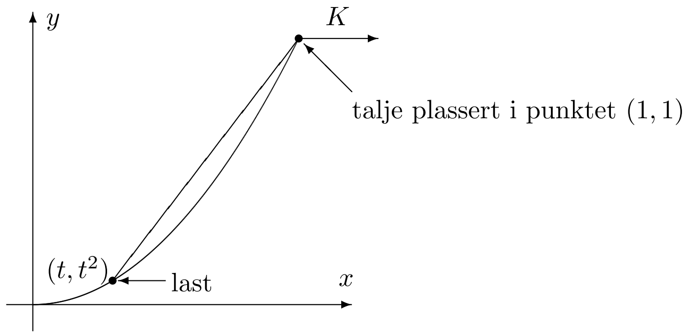


a) Vis at arbeidet som kraften utfører er gitt ved

$$W = K \int_0^{20} \frac{20 - t}{\sqrt{25 + (20 - t)^2}}\, dt$$

b) Finn W.

15. Figuren viser en last som skal dras opp en islagt skråning ved hjelp av et tau. Med passende valgte enheter befinner lasten seg ved tiden t i punktet $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j}$ der $t \in [0, 1]$. Trekkraften i tauet er konstant lik K.



a) Vis at kraften som virker på lasten ved tiden t er

$$\mathbf{K}(t) = \frac{K}{\sqrt{2 + 2t + t^2}} \Big(\mathbf{i} + (1 + t)\,\mathbf{j} \Big)$$

b) Vis at arbeidet som kraften $\mathbf{K}$ utfører på lasten fra bunn til topp er gitt ved:

$$W = K\int_0^1 \frac{1+2t+2t^2}{\sqrt{2+2t+t^2}}\,dt$$

c) Deriver uttrykket $(t-1)\sqrt{t^2+2t+2}$.

d) Bruk resultatet i punkt c) til å regne ut arbeidet W.

e) (Forutsetter at du kjenner de hyperbolske funksjonene sinh og cosh; se kapittel 7.7 i *Kalkulus*). Løs integralet

$$W = \int_0^1 \frac{1+2t+2t^2}{\sqrt{2+2t+t^2}}\,dt$$

ved hjelp av substitusjonen $\sinh u = t+1$.

NB: Det er flere oppgaver om linjeintegraler av vektorfelt i seksjon 15.5 i Adams' bok (noen av dem bør du vente med å regne til du har lest seksjon 3.7 i kompendiet).

Fasit

Arbeidet med fasiten har gått i raskeste laget, og svarene må betraktes med litt ekstra skepsis!

Seksjon 3.4

1. $189t^6$

2. $e^{\sin t\cos^2 t}\big(2\sin t\cos t+\sin^2 t\cos^3 t-2\sin^4 t\cos t\big)$

3. $2\cos(t^2)e^{2t}-\sin(t\cos(t^2))-t\cos(t^2)\cos(t\cos(t^2))-2te^{2t}\sin(t^2)+$
$+2t^3\sin(t^2)\cos(t\cos(t^2))$

4. $\frac{6t^6(3t+1)^2}{t^6+1}+6t(3t+1)\ln(t^6+1)+(3t+1)^2\ln(t^6+1)$

5. $\begin{pmatrix} 2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t \\ \cos^2 t-\sin^2 t+\cos t \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -4(1-t^2)t^2+(1-t^2)^2+\cos t \\ -\sin\big((1-t^2)\sin t\big)\big(-2t\sin t+(1-t^2)\cos t\big) \\ 2t(1-t^2)-2t^3 \end{pmatrix}$

7. Avtagende

Seksjon 3.5

1. 0

2. 160

3. 0

4. $\frac{864}{35}$

5. $\frac{1}{3}\left(2+4\pi^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

6. $2\sqrt{2}(1-e^{-1})$

10. $33.7K$

11. $\frac{89}{45}$ liter

12. c) π, d) 0

Seksjon 3.6

1. -48

2. 0

3. $\frac{1544}{21}$

4. $\cos 1-\cos 2+\frac{1}{2}(\ln 2)^2-\frac{e}{2}(\sin 1+\cos 1)+\frac{e^2}{2}(\cos 2+\sin 2)$

5. $\frac{\pi}{2}+\frac{\ln 2}{2}-1$

6. 0

7. $\frac{192}{5}$

8. $\frac{\pi^2}{2}$

14. $5K(\sqrt{17}-1)$

15. c) $\frac{1+2t+2t^2}{\sqrt{2+2t+t^2}}$, d)$K\sqrt{2}$, e) $\sqrt{2}$